物理科学演習問題（１１）　中島班　２００８／６／３０

小テスト (10 分)

問題 貯水タンクの水位が h の時、タンクの下部についた吸水口から排出される単位時間あたりの水量は $k\sqrt{h}$ であった。$t=0$ で $h=h_0$ であったとする。水位の時間変化を求めよ。ただし、タンクの断面積は一定で A とし、$k>0$ である。

問 1 一直線上を運動する質量 m の質点に、$F=-kx$ なる力が働いている (k は常数)。

(1) この質点の運動において、エネルギー保存則が成り立つことを示せ。

(2) 一直線上の運動において、横軸に位置 x、縦軸に運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ をとって図を描くと、その曲線の傾きは力を表すことを示せ。

問 2 質量 M の船が速度 v で進む時、水の抵抗は $f=av+bv^2$ (a,b は正の定数) を受けるとする。速度 v_0 の時にエンジンを止めれば、それからどれだけ進んで止まるか求めよ。ただし、変数変換 $\frac{d}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}=v\frac{d}{dx}$ を用いよ。

問 3 次の微分方程式を解け。(二階線形微分方程式 [同次])

(1) $y''-7y'+12y=0$　　(2) $y''+2y'+2y=0$　　(3) $y''-2y'+y=0$

問 4 質量 $m,\ 2m$ の２つの質点 A, B が、水平面の x 軸上で自然長 L、ばね定数 k のばねでつながれている。A, B の時刻 t での位置を $x_1,\ x_2$ とし、B が A よりも x 軸の正の方向にあるとする。ばねを伸ばして、A, B, ばね, 共に静止した状態から手を離す。

(1) A, B について運動方程式を立て、重心 x_G の運動を時刻 t の関数として表せ。ただし、$t=0$ で $x_1=0,\ x_2=L+a$ であるとする ($a>0$)。

(2) ばねの伸び $X=x_2-x_1-L$ は単振動することを示せ。

(3) **(1), (2)** より、$x_1,\ x_2$ の運動の様子を t の関数としてグラフに示せ。

問５ 質量 m の質点が $F(x) = -\dfrac{k}{x^2} + \dfrac{2\ell^2}{mx^3}$ $(k > 0, x > 0)$ で表される力を受けて x 軸上を運動している系を考える。

(1) この系の運動方程式を書け。

(2) エネルギー保存則が成り立っていることを示し、この系のポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ。(ただし、$U(\infty) = 0$ とする。)

(3) $U(x)$ をグラフに描け。なお、x 軸との交点、極小となる点などの座標を明示すること。

$U(x)$ が極小をとるときの x を x_0 とする。質点が x_0 の近傍にあるとき、近似的に単振動するとみなせる。

(4) $U(x)$ を x_0 の周りで２次までテーラー展開せよ。

(5) $F(x) = -\dfrac{dU}{dx}$ を利用して、この振動を記述する運動方程式を書け。

(6) 振動の周期を求めよ。

レポート問題（１１）　中島班　２００８／６／３０

A4 レポート用紙に解答を記入すること。学生番号、名前を記入し、２枚以上の時は必ず左上をホッチキスで止めて提出のこと。小テスト直後に回収します。

Q 重力の加速度が高さ y とともに $g = g_0\left(1 + \dfrac{y}{a}\right)^{-2}$ に従って減少するとき、鉛直上方に初速度 v_0 で投げ上げられた質点が再び地球上に戻らないようにするための初速度の下限を、運動方程式から求めよ。ただし、a は地球の半径である。