

小テスト (5分程度)

問題 質量 m の物体が速度に比例した空気抵抗を受けながら落下する。重力加速度を g 、空気抵抗の速度に対する比例係数を $\gamma (> 0)$ として、この運動の運動方程式を記せ。

体得すべきこと

- ベクトルを微分するとはどういうことか？
 - 二次元極座標を覚えよう。
-

ベクトルを微分するとはどういうことか。例えば、位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ を微分すると速度ベクトル $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$ が得られる (指定教科書 p.6 参照)。これを踏まえて、以下のベクトルの微分の問題を解いていこう。

問 1 次の各式を時間 t で微分せよ。ただし、 \mathbf{r} は t の関数で $r = |\mathbf{r}|$ であり、他の文字は定数あるいは一定なベクトルを表すものとする。

- | | | |
|--|---|--|
| (1) $r^2\mathbf{r} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}$ | (2) $(\mathbf{a}\mathbf{r} + r\mathbf{b})^2$ | (3) $r^3\mathbf{r} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ |
| (4) $\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{r\mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}$ | (5) $\mathbf{r}^2 + \frac{1}{r^2}$ | (6) $\frac{1}{2}m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$ |
| (7) $\mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$ | (8) $\mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$ | |

問2 (基本) デカルト座標で表される単位ベクトル \mathbf{i} , \mathbf{j} を二次元の極座標の単位ベクトル \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ で表せ。

問3 (重要) 以下の問いに答えよ。

(1) 二次元デカルト座標での位置 (x, y) を、極座標 (r, θ) を用いて表せ。すなわち、 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f_1(r, \theta)\mathbf{e}_r + f_2(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$ で表される $f_1(r, \theta)$ および $f_2(r, \theta)$ を求めよ。

(2) デカルト座標での速度 (\dot{x}, \dot{y}) を極座標を用いて表せ。また、その大きさを求めよ。すなわち、 $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = f_3(r, \theta)\mathbf{e}_r + f_4(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$ で表される $f_3(r, \theta)$ および $f_4(r, \theta)$ を求め、 $|\mathbf{v}|$ を r, θ で表せ。

(3) (2) と同様にして、デカルト座標表示での加速度ベクトル $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y$ を、極座標表示に直せ。

問4 指定教科書 第1章 演習問題 (p.16) 問11 を解け。

問5 指定教科書 第1章 演習問題 (p.16) 問12 を解け。

レポート提出

用紙が足りない場合に備え、予めA3用紙の何枚かをお持ち帰りいただくことをおすすめします。もし、用紙が足りない場合はA4レポート用紙(≠ルーズリーフ)を購入して、ホッチキスでとめて提出して下さい。レポート用紙は大学生の必携品です。

デカルト座標のことを、カーテシアン座標と呼ぶこともある。デカルトはフランス人で Des cartes と表記されるが、英語圏では後半だけを用いて Cartesian 座標と表記されるのである。ちなみに、座標は英語では coordinates である。

The velocity vector \mathbf{v} is represented as $\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$ in Cartesian coordinates.