物理科学演習問題（８）　中島班　２００９／６／１５

小テスト (5 分程度)

次の微分方程式を**変数分離法**を初期条件 ($t = 0$ で $v = 0$) の下で解け。

$$\frac{dv}{dt} = -g - \beta v$$

この問題は定数変化法で解くこともできる。そちらの方が自分にあっていると感じる人はその方法による解答でも可とする。その解答のあとに、変数分離法による解答もできるところまで解答してみよ。

体得すべきこと

- **同次線形微分方程式の解法（その１）をマスターせよ。**
- **テーラー展開を覚えよ。**
- **オイラーの公式を導く！**

問１ 次の問いに答えよ。

(1) e^x,　$\sin x$,　$\cos x$ をそれぞれマクローリン展開[1]せよ。

(2) (1) の結果を用いて、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を示せ。

(3) de Moivre's theorem $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ を証明せよ。

問２ 質量 m の物体がばね定数 k のばねに繋がれて水平面内で 運動する様子を考える。（指定教科書 第 3 章を見て答えよ。）

(1) 質点の運動方程式を書け。

(2) 教科書では、$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とおいて、(3.2) 式を得ている。この ω_0 は何か。

(3) 教科書では、[例 1.4] を参考に、微分方程式 (3.2) 式の解が (3.3) 式であるとしている。つまり、**(3.3) 式を微分すれば、(3.2) 式が得られるのだから、いいじゃん！** といっている。果たしてこれは正しいか？正しくない場合は、反例があるか？

(4) 教科書では、(3.1) 式の両辺に速度 $v = dx/dt$ を掛けて、極めて技巧的にこの方程式を解いている。最終的には、$x = \cdots$ となる (3.7) 式が求めたい解である。その途中で、(3.5) 式が導かれている。この式の物理的意味を答えよ。
[Hint. 第 4 章 p.51、p.56 あたりを見よ。]

[1] 関数 $f(x)$ を $x = 0$ の周りでテーラー展開 (Taylor expansion) したものをマクローリン (Maclaurin expansion) という。

(5) (3.5) 式から、(3.6) 式の変数分離の形が得られている。この変形ができるためには、極めて重要な「条件」が前提となっている。それは、何か?

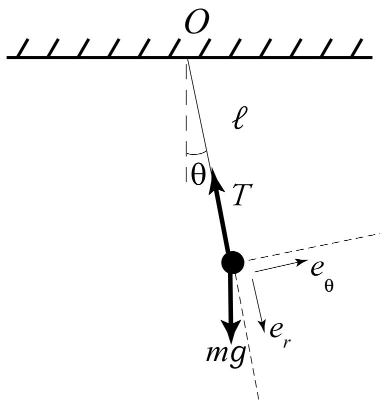
(6) (3.6) 式から、$x \to \theta$ の変数変換を行って (3.7) 式を得ている。この導出の過程を明記せよ。

(7) 一般に、(3.1) もしくは (3.2) のような 2 階微分方程式では、解には積分定数が 2 つ現れる。(3.7) 式では、どれとどれか?

(8) オイラーの公式を用いて、(3.7) 式を指数関数を用いた形に書き直せ。その際、**(7)** で述べた 2 つの積分定数との関係を可能な限り明らかにせよ。

問 3 (単振り子 : 再び !) 図のように、軽くて一定の長さ ℓ の糸を天井からつるし、先端に質量 m のおもりをつけて鉛直面内で揺らした。重力加速度を g、糸の張力を T として、以下の設問に答えよ。

(1) 振動の中心 O を原点とする極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて、$\boldsymbol{e}_r$ 方向および $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向の運動方程式を示せ。



微小なふれ角 $\theta = \theta_0$ で静止状態にあった質点を時刻 $t = 0$ で静かに離して、振り子運動をさせる。

(2) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ をマクローリン展開し、θ について 3 次以上の項を無視する近似を用いて、**(2)** で得られた運動方程式を書き直せ。

(3) 得られた運動方程式を解き、ふれ角 θ と張力 T を時間 t の関数として表せ。

問 4 指定教科書 第 3 章 p.45 演習問題 1 を解け。

問 5 指定教科書 第 3 章 p.45 演習問題 2 を解け。

問 6 指定教科書 第 3 章 p.45 演習問題 3 を解け。

問 7 放射性同位元素が単位時間当りに崩壊する原子の数は、今ある (崩壊していない) 原子の数 N に比例する。

(1) 比例係数を λ として、上述の問題文を微分方程式にして表せ。また、初期原子数を N_0 として、その微分方程式を解け。

(2) この元素の平均寿命 τ と半減期 T は、それぞれ $\dfrac{1}{\lambda}$ および $\log 2 \cdot \tau$ で与えられることを示せ。