

# 微分方程式による現象の記述

ST

平成 30 年 6 月 29 日

## 目次

1	はじめに	3
2	微分方程式	3
2.1	微分	3
2.1.1	速度	3
2.1.2	いろいろな微分	4
2.2	微分方程式	4
2.2.1	微分方程式の例	4
2.2.2	微分方程式の解	4
2.2.3	境界条件	5
2.3	バクテリアの増殖	5
2.4	単振動	6
3	1次元微分方程式の幾何学的解法	7
3.1	マルサス則	7
3.2	ロジスティック方程式	8
3.3	摩擦の大きい単振り子	9
3.3.1	厳密解	11
3.3.2	幾何学的解法	11
3.4	レーザーの発振	12
3.4.1	幾何学的解法	13
3.5	平衡点の安定性の判定	13
3.6	座屈問題	14
3.6.1	運動方程式	15
3.6.2	平衡点解析	16
3.7	駆動されている減衰振り子	18
3.8	ホタルの同期	19
3.8.1	位相差が従う微分方程式	19

3.9	ポテンシャルの考え方 . . . . .	20
3.9.1	強磁性転移 . . . . .	20
3.9.2	気液転移 . . . . .	22
4	2次元微分方程式の幾何学的解法 . . . . .	24
4.1	単振動 . . . . .	24
4.1.1	平衡点 . . . . .	24
4.1.2	位相図 . . . . .	24
4.2	ロミオとジュリエット . . . . .	26
4.2.1	方向を変えない解 . . . . .	27
4.2.2	固有値問題 . . . . .	27
4.2.3	ケーススタディ . . . . .	28
4.2.4	固有値の種類と平衡点の安定性 . . . . .	30

# 1 はじめに

この講義の内容は、“Nonlinear dynamics and chaos, S. H. Strogatz” という教科書から抜粋し、できるだけ簡単な数学のみを用いて説明する。ただし、微分という演算そのものについて、またベクトル、行列については基礎的な知識があるものとする。

# 2 微分方程式

ここではまず、微分方程式によっていかに現象が記述されるか説明する。

## 2.1 微分

### 2.1.1 速度

例えば時刻  $t_0$  に位置  $x_0$  にあった物体が、時刻  $t_1$  には位置  $x_1$  にあったとしよう。このとき平均の速度  $\bar{v}$  は

$$\bar{v} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \quad (1)$$

である。もちろん、 $t_0$  と  $t_1$  の間に、物体が  $x_0$  から  $x_1$  まで真っ直ぐに移動したとは限らない。どこかで止まっていた時間もあるかもしれないし、引き返した時間もあるかもしれない。そこで、より瞬間で一樣な運動を表すため、 $t_1 - t_0 \rightarrow 0$  とすることを考える。このとき、当然  $x_1 - x_0 \rightarrow 0$  となるが、それらの比

$$v = \lim_{t_1 - t_0 \rightarrow 0} \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \quad (2)$$

は必ずしも 0 とならない。この比  $v$  を瞬間の速度、もしくは単に速度という。数学的な厳密さを忘れれば、速度  $v$  は単に短い時間  $t$  における移動距離  $x$  (正しくは変位) をその時間で割ったものである。よって短い変化、という意味を記号  $d$  で表すと

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (3)$$

とかける。つまり、 $x$  の短い変化  $dx$  を  $t$  の短い変化  $dt$  で割ったものが速度である。短い、というところを 0 極限、で置き換えたものが、微分である。上の式は、 $x$  を時間  $t$  で微分したものが速度である、と読む。

また微分は、ある点での変化の傾き (変化率) である。傾きとは縦方向の変化を横方向の変化で割ったものであるので、(3) は、 $x$  軸に時刻  $t$  を、 $y$  軸に変位  $x$  をとったグラフの、ある時刻  $t$  での傾きを表している。

### 2.1.2 いろいろな微分

速度は変位の時間に対する変化率であり、変位を時間で微分したものであったが、微分されるものと微分するものはなんであっても良い。以下にいくつか例を挙げる。

- 水平距離  $x$  進むときの土地の高さ  $y$  の変化率が、勾配  $dy/dx$ 。
- 人口  $N$  に対する出生数  $M$  の変化率が、出生率  $dM/dN$ 。
- ダムの水深  $h$  に対する放水量  $V$  の変化率が、放水率  $dV/dh$ 。
- バクテリア数  $N$  に対する感染数  $M$  の変化率が、感染率  $dM/dN$ 。

2つの量がなんであれ、片方の量がある値の時の変化率が微分である。

## 2.2 微分方程式

### 2.2.1 微分方程式の例

微分方程式とは、2つの量の間の関係を、各点の傾きによって表す手法である。例えば、時刻  $t$  における速度  $v$  が常に一定値  $v_0$  であれば、

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad (4)$$

と書くことができる。ここで  $x$  は  $t$  の関数  $x(t)$  であるが、 $v_0$  は定数である。また、速度が時刻  $t$  に比例する場合は

$$\frac{dx}{dt} = kt \quad (5)$$

とかける。ここで  $k$  は定数である。また、速度が位置  $x$  に反比例するかもしれない。

$$\frac{dx}{dt} = kx^{-1} \quad (6)$$

このような変化率である関数を表現したものが微分方程式である。

### 2.2.2 微分方程式の解

微分方程式の解とは、それを両辺に代入したとき、両辺が一致することである。例えば

$$x = v_0 t \quad (7)$$

を (4) の左辺に代入すると

$$(\text{左辺}) = v_0 \quad (8)$$

となって右辺と等しくなる。よって  $x = v_0 t$  は (4) の解である。また

$$x = \sqrt{2kt} \quad (9)$$

を (6) の左辺に代入すると

$$(\text{左辺}) = kx^{-1} \quad (10)$$

となって右辺と等しくなる。よって  $x = \sqrt{2kt}$  は (6) の解である。ある微分方程式の解は無数に存在する。例えば (10) に任意定数  $C$  を足した

$$x = \sqrt{2kt} + C \quad (11)$$

も、(6) の解である。

### 2.2.3 境界条件

微分方程式の解は、任意定数  $C$  の数だけ条件を課してやることで、1 つに定めることができる。例えば、 $t = 0$  で  $x = 0$  であるという条件を (11) に課してやると  $C = 0$  となって解は

$$x = \sqrt{2kt} \quad (12)$$

の 1 つだけに定まる。このような条件を境界条件という。

## 2.3 バクテリアの増殖

あるバクテリアが、分裂しながら増殖する現象を考える。1 匹のバクテリアが 2 匹に分裂するので、その増殖率  $dN/dt$  はバクテリアの数  $N$  に比例する。よって

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (13)$$

ここで  $r$  は定数とする。 $r$  はバクテリア個体の増殖能力に関する量で、内的増殖率などと呼ばれる。これをマルサス則という。(13) の解は

$$N = Ce^{rt} \quad (14)$$

である。境界条件 (初期条件) として  $N(0) = N_0$  を課すと、

$$N = N_0 e^{rt} \quad (15)$$

のようにある 1 つの解に定まる。

問 1 (15) は現実をよく表す部分と表さない部分をもつ。それぞれどのような点か、考察せよ。

## 2.4 単振動

バネを長さ  $x$  だけ伸ばしたときに生じる力  $F$  は

$$F = -kx \quad (16)$$

のように近似することができる。ここで  $k$  はバネ定数と呼ばれる定数である。このバネを水平に置いてその一端を固定し、他端に質量  $m$  のおもりをつなげた時、おもりの運動は運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (17)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (18)$$

と呼ばれる微分方程式で表される。ここで  $dv/dt$  は速度の変化率で加速度と呼ばれる量である。加速度は

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (19)$$

のように、位置  $x$  の 2 階微分として表すこともできる。このとき運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (20)$$

のように 2 階の微分方程式として表される。この運動方程式の解は

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (21)$$

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (22)$$

で表される。ここで  $A, B$  は任意定数である。一般に微分方程式の解は、階数と同じ数の任意定数を含む。

問 2 (21) が (20) の解であることを確認せよ。

境界条件  $x(0) = x_0, v(0) = 0$  ( $t = 0$  で位置  $x_0$  でそっと離す) を課すと解は

$$x = x_0 \cos \omega t \quad (23)$$

のように定まる。運動方程式 (20) に従う振動を単振動と呼ぶ。

### 3 1次元微分方程式の幾何学的解法

上で見た例のうち、バクテリアの増殖は1変数の1階微分方程式で書かれている。このような、1変数1階微分方程式をここでは1次元微分方程式と呼ぶ。これから1次元微分方程式で表されるいくつかの例を見ていき、それらの微分方程式を簡単に解釈し、有用な情報を得ることができる幾何学的解法を説明する。

#### 3.1 マルサス則

微分方程式 (13) を再考する。

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (24)$$

この解が、初期条件  $N(0) = N_0$  のもとで

$$N = N_0 e^{rt} \quad (25)$$

であることは確認した。このように微分方程式の解を関数として得ることができれば、そのグラフを書くことができる。しかし、おおまかな解の傾向を

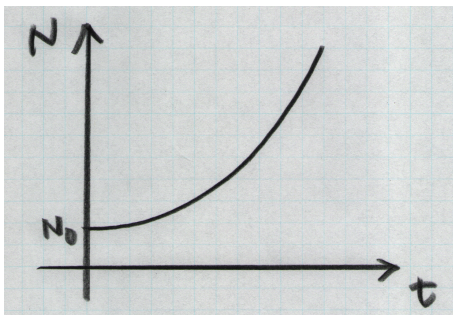


図 1: マルサス則。

みるだけなら、微分方程式を直接解かなくてもよい。下図は、(24) の関係を、横軸に  $N$ 、縦軸に  $dN/dt$  をとって描いたものである。

この図から分かるように、 $N$  の  $t$  に対する傾きは、 $N$  の全領域で正で、 $N$  に比例して増加している。 $dN/dt$  は  $N$  の変化率(すなわち速度)であるので、 $N$  の動きを横軸に描くと、右向きに徐々に速さを増しながら移動している点として表される。すなわち、図 1 のように徐々に加速して増大していく様子が図 2 から直接読み取れるのである。このような手法を幾何学的解法と呼ぶ。この例では直接微分方程式を解く解法と、幾何学的解法にそれほど差はないが、次の例では両者に大きな違いが出てくる。

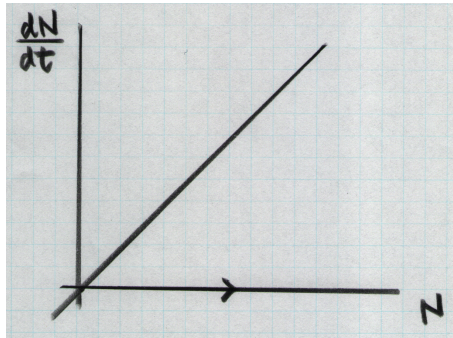


図 2: (24) をグラフにしたもの。

### 3.2 ロジスティック方程式

(24) の解は、 $t \rightarrow \infty$  で指数関数的に発散する。しかし、実際のシステムで、個体数が無限大になることはありえない。なぜなら、個体数が増加すると、増殖に利用できる資源が減少し、増加率  $r$  が減少するためである。これを表すために、 $r$  を  $N$  の関数として  $r - kN$  ( $k$  はある定数) に置き換え、(24) を

$$\frac{dN}{dt} = (r - kN)N = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N \quad (26)$$

と変形する。ここで  $K$  は定数で環境収容力と呼ばれる。この微分方程式をロジスティック方程式と呼ぶ。(26) の解は、境界条件  $N(0) = N_0$  のもとで

$$N = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} \quad (27)$$

となる。

問 3 (27) が (26) の解であることを確認せよ。

しかし、(27) は (26) の解としてどの程度有用であろうか。実際 (27) をグラフに描くのはそう簡単ではない。また、例えば  $t \rightarrow \infty$  で  $N$  がどのような値をとるのか、(27) は直接与えてくれているわけでもない。

次に (26) を幾何学的解法によって解いてみよう。縦軸に  $dN/dt$  を、横軸に  $N$  をとって (26) をグラフにすると図 3 のようになる。

図 3 より、 $0 < N < K$  では  $N$  は右向きに移動し、 $K < N$  で  $N$  は左向きに移動することが分かる。微分方程式の変数の流れを示した図を位相図という。1 次元微分方程式では位相図は数直線上に向きを示したものとなる。位相図より、 $t \rightarrow \infty$  で  $N \rightarrow K$  となることが直接読み取れる。これが  $K$  を環境収容力と呼ぶ理由である。このような、それ以上時間変化しない微分方程式の解を平衡点という。また、 $N = K$  に向かって、左からは傾きが一旦大きくなってからちいさくなり、右からは傾き (の絶対値) が常に小さくなりなが



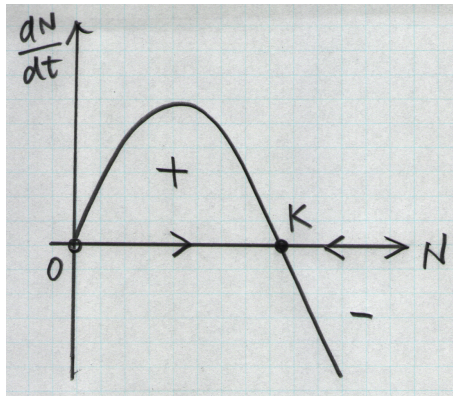


図 3: ロジスティック方程式。

ら移動することも分かる。以上を踏まえて  $N$  を  $t$  の関数としてグラフに描くと図 4 のようになる。実際、(27) をグラフにすると、図 5 のようになる。

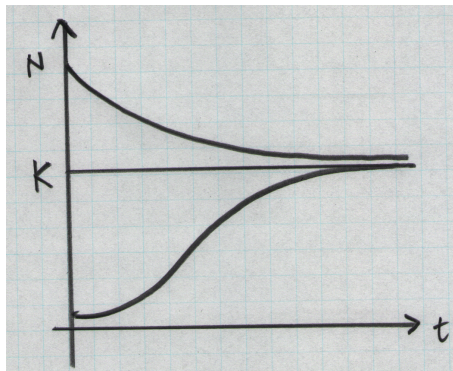


図 4: ロジスティック方程式。  $N$  の  $t$  依存性。

### 3.3 摩擦の大きい単振り子

図 6 に示したような、長さ  $r$  の棒に質量  $m$  のおもりを取り付け、他端を点  $O$  に回転できるように止めた振り子を考える。このような振り子を単振り子という。おもりの最下点からおもりの位置までの弧長を  $l$ 、棒と鉛直下向き方向のなす角度を  $\phi$  とすると

$$l = r\phi \quad (28)$$

である。おもりの運動方向には、重力  $mg$  ( $g$  は重力加速度) の成分と、速さに比例する抵抗力  $-bdl/dt$  ( $b$  は抵抗係数) のみが作用しているので、運動方

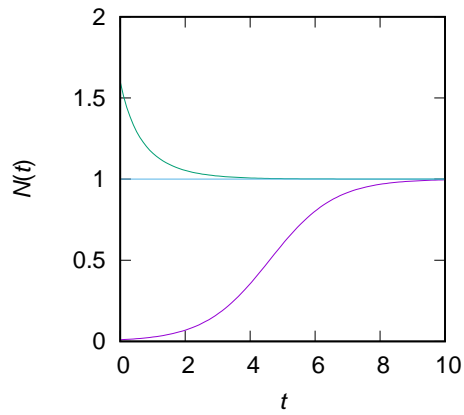


図 5: 式 (27) を描いたもの。初期条件は  $N_0 = 0.01, 1, 1.6$ 、 $K = 1, r = 1$  とした。

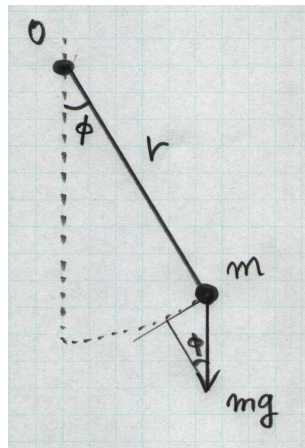


図 6: 単振り子。

程式は

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} = -b \frac{dl}{dt} - mg \sin \phi$$

$$\therefore mr \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -rb \frac{d\phi}{dt} - mg \sin \phi \quad (29)$$

ここで  $m \ll b$  の場合を考える。これは摩擦が十分大きくて、(29) の左辺 (慣性項) が、右辺第 1 項 (抵抗項) に比べて無視できる場合である。このとき、(29) は

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{mg}{rb} \sin \phi \quad (30)$$

と近似することができる。 $mg/(rb) = 1$  となるように  $m, r, b$  を調整したとす

るとこのおもりの運動は

$$\frac{d\phi}{dt} = -\sin \phi \quad (31)$$

で表されることになる。

Note: 正確には、(30) から (31) への変形には無次元化という操作が必要であるが、ここでは省略する。

### 3.3.1 厳密解

(31) の解は

$$t = -\log \left| \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} \right| + C \quad (32)$$

( $C$  は任意定数) で与えられる。

問4 (32) が (31) の解であることを確認せよ。

(32) は  $t$  の  $\phi$  に関する関数であるし、 $\phi$  について書き直すこともできそうにない。ましてや、 $t \rightarrow \infty$  で  $\phi$  がどうなるか、そこへどのように近づくのか、などに答えられそうもない。

### 3.3.2 幾何学的解法

そこで (31) を幾何学的に解くことを考える。 $d\phi/dt$  と  $\phi$  のグラフを描くと図7のようになる。ここで  $\phi$  軸が位相図である。図から  $-2\pi < \phi < 2\pi$  のどこを初期値として与えても、 $t \rightarrow \infty$  で必ず  $\phi \rightarrow 0$  となることが分かる。

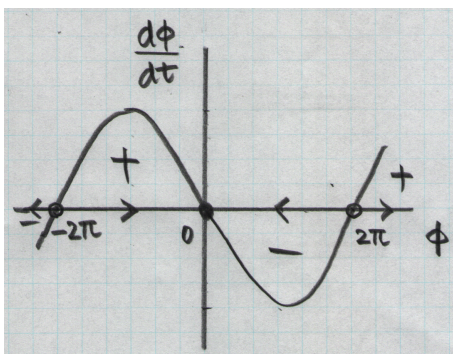


図7: (31) のグラフ。

また、図7から、 $\phi$  の  $t$  依存性も図44のように描くことができる。もし初期値が  $\pi$  より大きければ、傾きは  $\phi = \pi$  になるまで増加し、その後減少する。もし初期値が  $\phi$  より小さければ、傾きは減少し続ける。

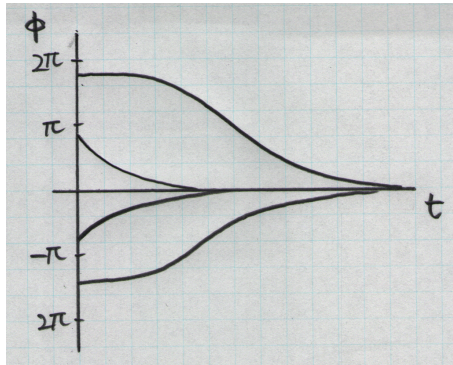


図 8: (31) のグラフ。

### 3.4 レーザーの発振

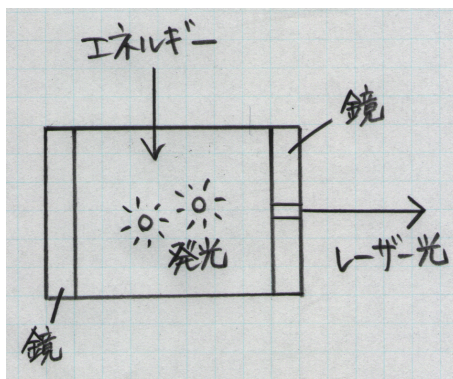


図 9: レーザーの原理。

ここではレーザーの発振原理を考え、その挙動を微分方程式で表してみよう。図9はレーザーの原理を模式的に描いたものである。エネルギーを与えられることによって発光する物質を2枚の鏡の間に閉じ込める。レーザー内の光子の数を  $n$  とし、その変化が

$$\frac{dn}{dt} = (\text{生成量}) - (\text{消失量}) = GnN - kn \quad (33)$$

と表されるとする。右辺第一項は光子の生成量で、 $N$  はエネルギーを受けて励起されている(エネルギーの高い状態にある)分子の数とする。生成量が  $n$  と  $N$  の積に比例するのは、励起した分子が光子を受けることで、新たな光子を発生することを表すためである。つまり、光子と励起した分子の両者が同時に存在しなければ光子は生成されない。光子を放出した分子は基底状態(エネルギーの低い状態)に戻るとする。 $G$  は比例定数である。吸収などによる光子の消失が確率的に起きるとすると、消失量は  $n$  に比例する。 $k$  はこの

比例定数である。エネルギー注入によって励起される分子数を  $N_0$  とすると、励起された分子は光子の衝突、それによる新たな光子の放出によって基底状態に戻るので

$$N = N_0 - \alpha n \quad (34)$$

と仮定できる。ここで  $\alpha$  は定数である。(33), (80) より、光子の変化を

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= Gn(n_0 - \alpha n) - kn \\ &= (GN_0 - k)n - \alpha Gn^2 \end{aligned} \quad (35)$$

と表すことができる。

### 3.4.1 幾何学的解法

(35) のグラフは、 $GN_0$  と  $k$  の関係によって 3 つのパターンが存在する (図 10)。例えばエネルギー注入を増やして  $N_0$  を増加させると、 $N_0 = k/G$  となった時点から光子数  $n$  が正となり、 $N_0$  とともに大きくなる。平衡点の  $n$  は  $dn/dt = 0$  を解いて

$$n = \frac{N_0}{\alpha} - \frac{k}{\alpha G} \quad (36)$$

であり、 $N_0$  に比例して大きくなる。光子数  $n$  のグラフを  $N_0$  に対して描いたものが図 11 である。ちなみに、 $n = 0$  も平衡点ではあるが、不安定な平衡点である。つまり、 $n = 0$  の状態からわずかなゆらぎで  $n > 0$  となったとき、 $n$  は  $n = N_0/\alpha - k/(\alpha G)$  の値に遷移する。この状態は安定な平衡点であり、ゆらぎによってこの値からはずれたとしても、常にこの値に戻ってくる。安定な平衡点を実線で、不安定な平衡点を破線で示し、平衡状態をあるパラメータ (ここでは  $N_0$ ) に対して示した図を分岐図という。図 12 はレーザー発振の分岐図である。平衡点  $n = 0$  の安定性が  $N_0 = k/G$  で安定から不安定へ変化する。分岐図中の矢印は、その領域の全ての点が安定な平衡点へ遷移することを示している。

## 3.5 平衡点の安定性の判定

ある微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (37)$$

が与えられ、ある点  $x_0$  で  $f(x_0) = 0$  であったとする。つまり  $x_0$  が平衡点であったとする。この平衡点の安定性をどのように判定すればよいであろうか。実は判定はとても簡単で、平衡点で、 $dx/dt$  が  $x$  軸をどのように横切るのか

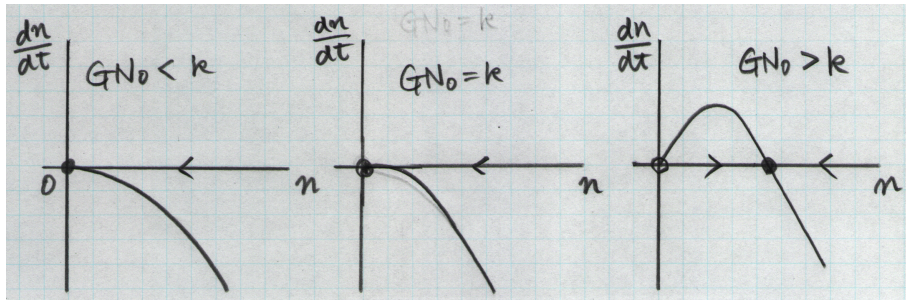


図 10: (35) の 3 つのパターン。

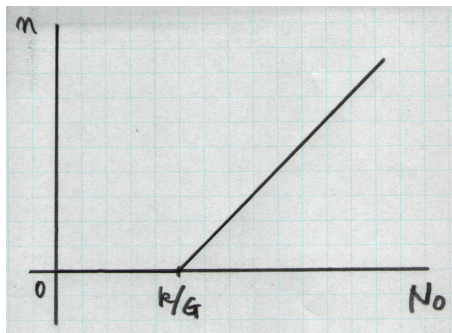


図 11: レーザー発振の様子。

を見れば良い。図 13(a) のように右上がりに横切るときは、図よりこの平衡点は不安定であり、図 13(b) のように右下がりに横切るときは安定である。 $df/dx$  が関数  $f(x)$  の傾きであることを利用して、このことを数学的に

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} > 0 \text{ 不安定} \quad (38)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} < 0 \text{ 安定} \quad (39)$$

のように表現する。

それでは平衡点で傾きが 0 の場合はどう判定すればよいのであろうか。図 14 のように、この場合、ゆらぎがある場合に平衡点にとどまれないという意味で、平衡点は不安定である。 $x$  がどちら向きに変化するかは関数  $f(x)$  がどのように  $x$  軸に接するかによる。

### 3.6 座屈問題

座屈とは、例えばある垂直に立った棒の上に荷重をかけて行った時、ある荷重以上で棒が曲がる現象のことである (図 15)。

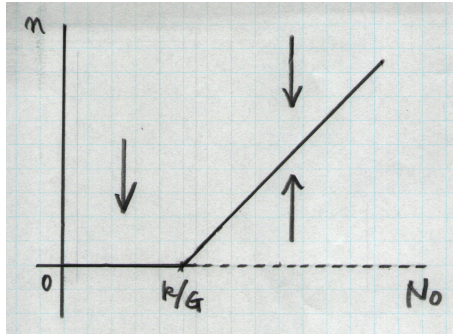


図 12: レーザー発振の分岐図。

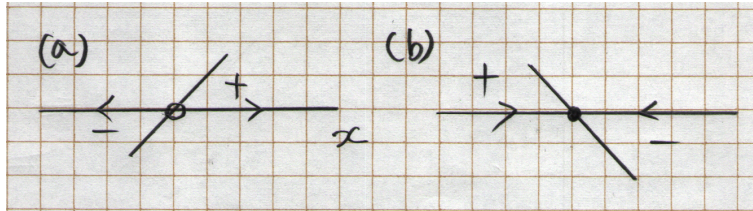


図 13: 平衡点の安定性。

座屈現象を単純化して図 16 のような状況を考えよう。バネ定数  $k$ 、自然長  $l_0$  のバネで、高さ  $h$  の位置に水平にはられたワイヤー上の質量  $m$  のおもりを高さ 0 にある原点に固定する。 $t < 0$  で  $h > l_0$  で、原点はおもりの真下にあるとする。このおもりの位置からの、ワイヤー上の変位を  $x$  とする。時刻  $t = 0$  で高さ  $h$  を変化させた時、おもりはどのような運動をするだろうか。おもりには  $b$  を定数として、速度に比例した摩擦力  $-bdx/dt$  が働くとする。

### 3.6.1 運動方程式

バネの長さを  $l$  とすると、おもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - k(l - l_0) \cos \theta \quad (40)$$

となる。ただし  $\theta$  はバネとワイヤーがなす角である。

$$l = \sqrt{h^2 + x^2} \quad (41)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{l} \quad (42)$$

より、(40) は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right) \quad (43)$$

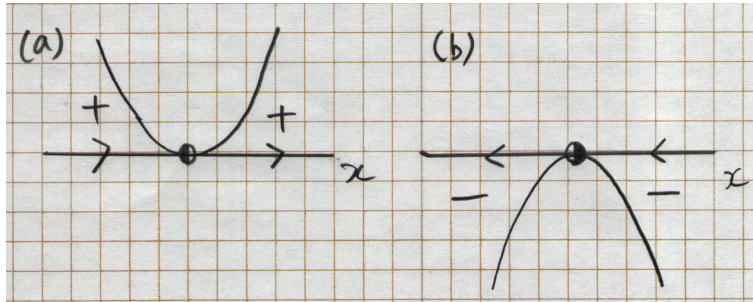


図 14: 平衡点で傾きが 0 の場合。

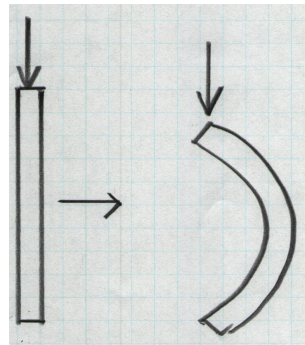


図 15: 棒の座屈。

となる。さらに、摩擦が大きくて摩擦項に比べて慣性項が無視できる ((43) の左辺を 0 と近似できる) とすると

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{b}x\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right) \quad (44)$$

と変形できる。

### 3.6.2 平衡点解析

(44) の平衡点は

$$x = \begin{cases} 0 & h > l_0 \text{ のとき} \\ 0, \pm\sqrt{l_0^2 - h^2} & h < l_0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (45)$$

また、

$$\frac{df}{dx} = -\frac{k}{b} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right) - \frac{k}{b} \frac{l_0 x^2}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \quad (46)$$

であるから  $x = 0$  では

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{k}{b} \left(1 - \frac{l_0}{h}\right) \quad (47)$$



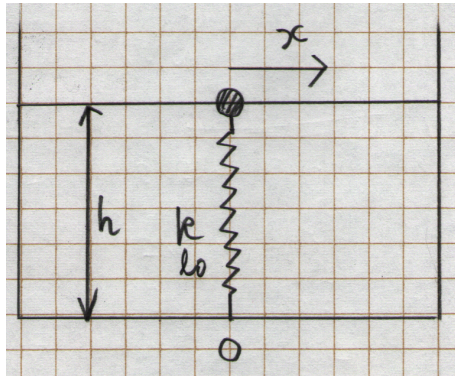


図 16: 座屈のモデル。

となる。よって  $h > l_0$  から  $h$  を小さくしていくと、 $h = l_0$  で  $df/dx|_{x=0}$  は負から正へ変化する。すなわち、 $x = 0$  は  $h > l_0$  で安定、 $h < l_0$  で不安定である。また  $x = \sqrt{l_0^2 - h^2}$  では

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\sqrt{l_0^2-h^2}} = -\frac{k}{b} \left( 1 - \frac{h^2}{l_0^2} \right) \quad (48)$$

となる。 $h < l_0$  のとき (48) は常に負なので、この平衡点は安定である。以上をまとめると分岐図は図 17 のようになる。 $h > l_0$  で安定だった  $x = 0$  の点は、 $h = l_0$  で正負 2 つの平衡点に分岐する。これはおもりが右にいくのと左にいくのとの間に差がないことを反映している。このような現象を、対称性の破れという。

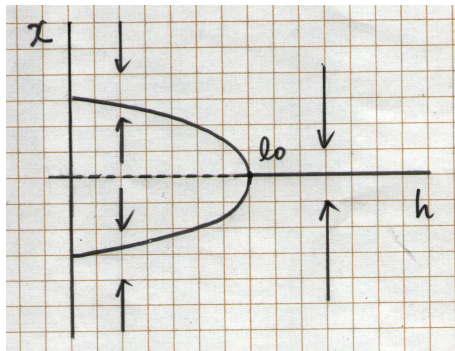


図 17: 図 16 の分岐図。

### 3.7 駆動されている減衰振り子

(31) に定数  $\gamma > 0$  を加えて

$$\frac{d\phi}{dt} = \gamma - \sin \phi \quad (49)$$

という式にしてみる。右辺第 2 項がなければ  $\gamma$  によって  $\phi$  は増加し続けるから、 $\gamma$  は振り子を駆動する項であることが分かる。ただし、 $\theta = 2\pi$  の状態と  $\theta = 0$  の状態は同じ状態である。このような条件を周期的境界条件という。図 59 に (20) の右辺第 1 項と第 2 項を描いてみると、 $\gamma$  の大きさによって平衡点が異なることが分かる。すなわち、 $\gamma > 1$  のときには  $\gamma$  は常に  $\sin \phi$  より大きいので  $\phi$  は増加し続ける。つまり振り子は反時計周りに回転を続ける。一方  $\gamma < 1$  のときには  $0 < \phi < \pi/2$  に安定な平衡点が、 $\pi/2 < \phi < \pi$  に不安定な平衡点が現れる。つまり、この時おもりは安定な平衡点の位置で静止する。この様子を分岐図で表すと図 19 のようになる。 $\gamma$  を  $\gamma > 1$  の状態から徐々に小さくしていくと、 $\gamma = 1$  で安定な平衡点と不安定な平衡点がペアで現れることが分かる。

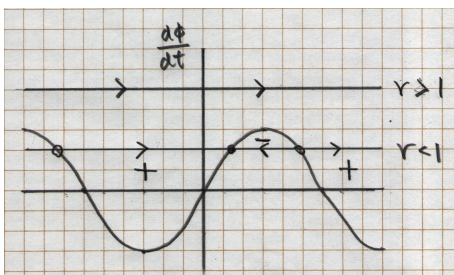


図 18: 駆動されている減衰振り子。

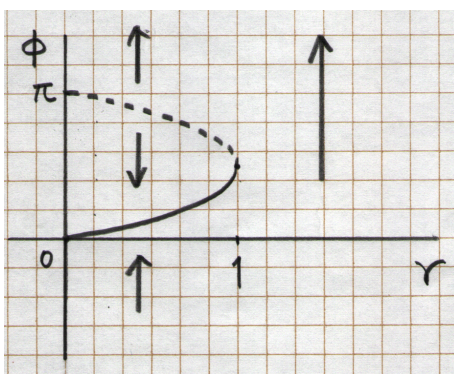


図 19: 駆動されている減衰振り子の分岐図。

### 3.8 ホタルの同期

ホタルが群れているとき、それぞれの点滅が同期することはよく知られている。このような同期の仕組みを微分方程式で考えてみよう。まず、ホタルが単独にいるときの周期的な点滅を、角速度  $\omega$  で回転する角度  $\theta$  の微分方程式

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (50)$$

で表す。これを解くと  $\theta = \omega t$  であるから、 $\theta$  は時間に比例して増加する。ただし、周期的境界条件を課して、 $\theta = 2\pi$  と  $\theta = 0$  は同じ状態であるとする。ここで角度  $\theta$  はホタルの内部状態を表す仮想的なもので、例えば  $\theta = 0$  のときホタルは発光する、というように考えればよい。この  $\omega$  の値は個々のホタルで多少違うとする。次に周囲のホタルが群れとして

$$\frac{d\Theta}{dt} = \Omega \quad (51)$$

に従って周期的な発光をしているとする。 $\Theta$  周期的境界条件に従うとする。すなわち、この群れは  $\Theta = 0$  のときに発光すると考える。このような群れの周期的な発光に、上で考えたホタルの発光は

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + A \sin(\Theta - \theta) \quad (52)$$

のように影響を受けるとする。つまり、発光タイミングが  $\Theta - \theta = \pi/2$  ずれているとき、このホタルは最も大きく発光タイミングを進めて同期させようとする。一方  $\Theta - \theta = 0$  (同相) のときや、 $\Theta - \theta = \pi$  (逆相) のときには、発光タイミングを進ませるべきか遅らせるべきか判断できず、発光タイミングを変化させない。定数  $A$  は発光タイミングの修正能力を表す定数である。

#### 3.8.1 位相差が従う微分方程式

注目するホタル個体と群れの発光タイミングの差を位相差  $\phi = \Theta - \theta$  とおくと、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \quad (53)$$

$$= \Omega - \omega - A \sin \phi \quad (54)$$

と書ける。 $A = 1$ 、 $\gamma = \Omega - \omega$  とおくと

$$\frac{d\phi}{dt} = \gamma - \sin \phi \quad (55)$$

となり、駆動されている減衰振り子の微分方程式 (20) と同じである。よって微分方程式のグラフと分岐図はそれぞれ図 59、図 19 と同じになる。すなわち、 $\gamma > 1$  のときは、群れの発光タイミングとこの個体の発光タイミングの

差が大きすぎて、位相差は常に変化し続ける。一方  $\gamma < 1$  のときは、この個体の発光タイミングはある安定な平衡点に落ち着くことが分かる。ただしこのとき位相差は  $0 < \phi < \pi/2$  であって 0 ではない。位相差が 0 になるのは  $\gamma = \Omega - \omega = 0$  のときのみである。

### 3.9 ポテンシャルの考え方

1次元微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x) \quad (56)$$

において、関数  $f(x)$  が別の関数  $V(x)$  の  $x$  微分として

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (57)$$

のように与えられているとする。この関数  $V(x)$  をポテンシャルという。すなわち、

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{V(x)}{dx} \quad (58)$$

である。右辺にマイナスが付いているのは、 $x$  がポテンシャルの傾きを下る方向に進むように時間変化させるためである。 $x$  はポテンシャルを下り続け、ポテンシャルが極小となる位置で止まる。つまり、ポテンシャル極小の点が平衡点である。もちろん、ポテンシャルが極大の点でも  $x$  は変化しない。この点は不安定な平衡点である。これに対して、ポテンシャルの極小点は安定な平衡点である。

$x$  が質点の位置を表す場合、(58) は抵抗が大きく慣性が無視できる場合の運動方程式となり、 $V(x)$  は力学的なポテンシャルエネルギーと等しくなる。(58) が運動方程式ではない場合にも、1次元の場合には常にポテンシャルの考え方が適用できる。以下ではいくつかポテンシャルの例を見てみよう。

#### 3.9.1 強磁性転移

強磁性体とは、鉄やコバルトなど、外から磁場を加えなくても、例えば温度を下げることによって磁気を帯びることのできる物質である。強磁性体に生じる磁性を自発磁化という。今、自発磁化を  $x$  として、 $x$  を持つ物質のポテンシャル (正確には自由エネルギーという) が

$$V(x) = -\frac{r}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \quad (59)$$

のように書けるとしよう。ここで  $r$  は、温度  $T$  とある定数  $a(> 0)$ ,  $T_c$  を用いて  $r = a(T_c - T)$  と書けるパラメータである。 $r$  は  $V(x)$  の極小値の数を制御するパラメータである。実際

$$\frac{dV}{dx} = x(-r + x^2) \quad (60)$$

であるから

$$r \leq 0: V(x) \text{ は } x = 0 \text{ でのみ極小} \quad (61)$$

$$r > 0: V(x) \text{ は } x = 0 \text{ と } x = \pm\sqrt{2r} \text{ で極小} \quad (62)$$

となる。 $V(x)$  のグラフを図 20 に示す。このとき、自発磁化  $x$  の変化は (58) より

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3 \quad (63)$$

で与えられる。図 21 に (63) の右辺を描いたものを示す。 $r = 0$  を堺に、有限の自発磁化が正負に現れることが分かる。自発磁化の正負は、磁化の上向き、下向き、に対応している。 $x = 0$  の状態からどちらの正負磁化状態に変化するかは、ゆらぎによって決まる。これも対称性の破れである。

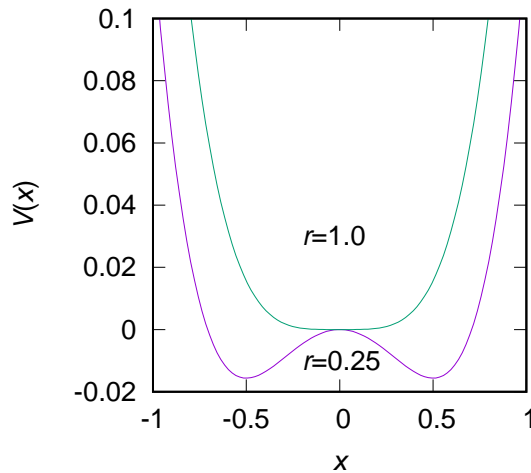


図 20: (59) のグラフ。

(63) の平衡点  $x_M$  が自発磁化の値であるから、ある温度における自発磁化は

$$x_M = \pm\sqrt{a(T_c - T)} \quad (64)$$

で与えられる。この様子を図 22 に示す。転移点  $T_c$  で自発磁化が出現し、連続的に増加している。このような転移を連続相転移という。

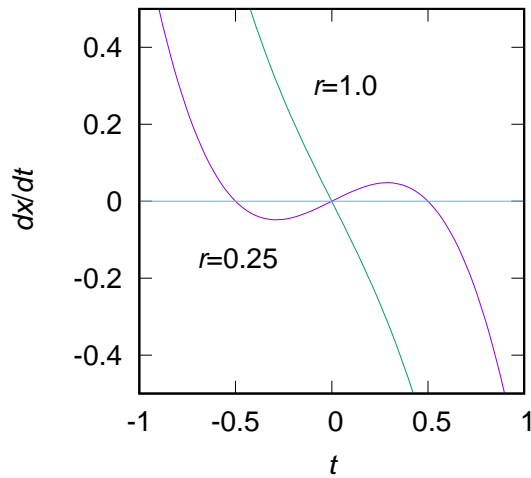


図 21: (63) のグラフ。

### 3.9.2 気液転移

水蒸気から水滴が生じるような気液転移を考えよう。今  $x$  を水の密度とし、 $x$  のポテンシャルを

$$V(x) = -\frac{r}{2} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad (65)$$

と仮定する。図 23 に (65) のグラフを示す。

$r < -1/4$  から始めて徐々に  $r$  を大きくしていったとき、 $r = -1/4$  のときにポテンシャルは  $x = 0$  以外の極小を持ち始める。ただしこの極小は最小ではなく、 $x = 0$  にあった状態が変化するわけではない。 $r = -4/18$  のときにポテンシャルの最小が  $x = 2/3$  に (突如) 現れる。 $r = -4/18$  の時が転移点であるとすると  $r = a(T - T_c) - 4/18$  とすれば、転移温度  $T = T_c$  で水の密度が 0 から  $2/3$  に不連続に転移することが表される。このような転移を不連続転移または 1 次相転移という。

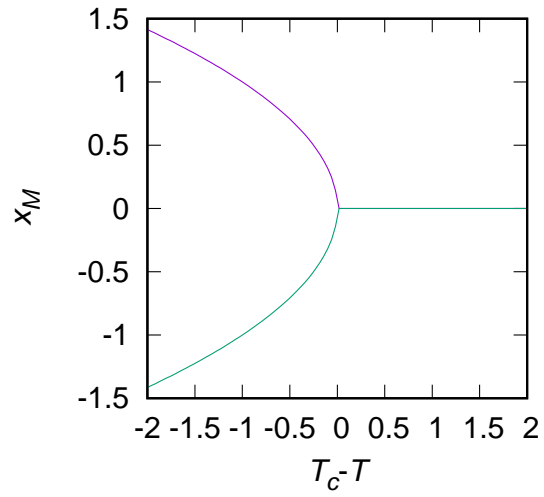


図 22: (64) のグラフ。

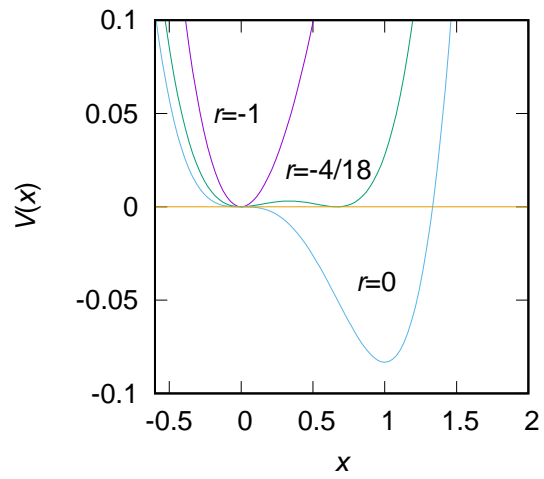


図 23: (65) のグラフ。

## 4 2次元微分方程式の幾何学的解法

ここでは2変数1階微分方程式で表されるいくつかの例を紹介する。これらをここでは2次元微分方程式と呼ぶ。2階の微分方程式である運動方程式も、変数の追加によって2次元微分方程式として表すことができる。2次元微分方程式では周期解を含む、多数の解パターンが出現する。以下ではその様子を、できるだけ幾何学的な観点から理解していく。

### 4.1 単振動

単振動の運動方程式(20)はより簡単に

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \quad (66)$$

と書かれることが多い。ここで $\omega_0^2 = k/m$ である。ここで速度 $v$ を導入して(66)を

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega_0^2 x \end{aligned} \quad (67)$$

と書き直すと、これは2変数1階微分方程式、つまり2次元微分方程式である。

#### 4.1.1 平衡点

平衡点 $(dx/dt, dv/dt) = (0, 0)$ を解くと $(x, v) = (0, 0)$ 。よって原点が平衡点である。

#### 4.1.2 位相図

2次元微分方程式の位相図は2つの変数を軸として、各点での速度 $(dx/dt, dy/dt)$ をベクトルとして表した、2次元平面上のベクトル場である。今の場合、例えば縦軸に $v$ をとり、横軸に $x$ をとって位相図を作る。位相図上で $dx/dt = 0$ となる点を考えよう。(67)より $v = 0$ 、つまり $x$ 軸上の点で $dx/dt = 0$ となる。すなわち、 $x$ 軸上での速度ベクトルは $x$ 成分を持たない。同様に $dv/dt = 0$ となる点は $x = 0$ 、つまり $v$ 軸上の点であり、そこでの速度ベクトルは $v$ 成分を持たない。向きまで考えると、図24のようになる。

図24だけ見ているとベクトル場が円になるようにも見えるが、 $(x, v)$ と $(dx/dt, dv/dt)$ の内積をとってみると

$$(x, v) \cdot (dx/dt, dv/dt) = (1 - \omega_0^2)xv \quad (68)$$



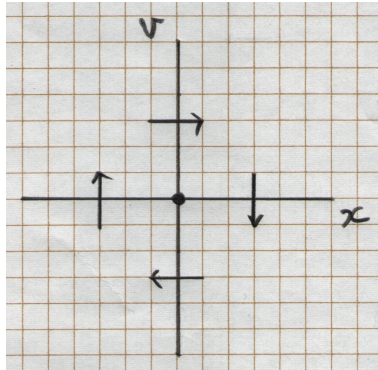


図 24: (67) の位相図上で速度ベクトルが軸に平行になる点。

であり、 $\omega_0 = 1$  のとき以外は 0 とならない。つまり  $(x, v)$  と  $(dx/dt, dv/dt)$  は直交しているわけではない。実際  $a = x^2 + v^2/\omega_0^2$  として  $da/dt$  を計算してみると

$$\frac{da}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + \frac{2v}{\omega_0^2} \frac{dv}{dt} \quad (69)$$

$$= 2xv - 2xv = 0 \quad (70)$$

であるから  $a$  は定数である。よって

$$\frac{x^2}{a} + \frac{v^2}{a\omega_0^2} = 1 \quad (71)$$

であるから、 $(x, v)$  の軌跡は楕円となる。よって  $\forall$  (67) の位相図は図 25 のような楕円の集合で、原点のみが平衡点となる。

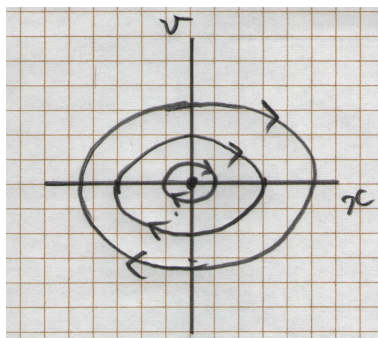


図 25: (67) の位相図。

## 4.2 ロミオとジュリエット

2人の男女(ロミオとジュリエット)の人間関係をモデル化した微分方程式を解いてみよう。2つの変数  $R(t)$  と  $J(t)$  を

$$R(t) = \text{ロミオのジュリエットに対する愛憎} \quad (72)$$

$$J(t) = \text{ジュリエットのロミオに対する愛憎} \quad (73)$$

を表す量とする。ただし正を愛、負を憎とする。例えば

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aJ \\ \frac{dJ}{dt} &= -bR \end{aligned} \quad (74)$$

とすると、(74) は (67) 同じ形であるので位相図は図 26 のようになる。相思相愛状態はこの位相図の第 1 象限であるが、(74) の場合そこにとどまることは決してない。

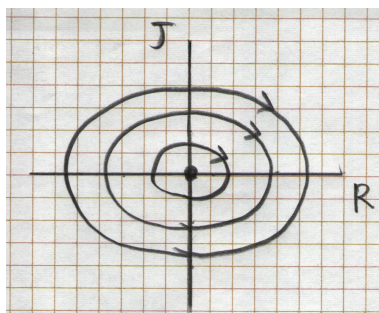


図 26: (74) の位相図。

もう少し一般的に  $R, J$  の関係式を

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ \end{aligned} \quad (75)$$

とかこう。これは 2次元線形微分方程式と呼ばれる形である。 $a-d$  は相手と自分の愛憎を、自分の愛憎の増減にどう影響させるか、を決めるパラメータである。

(75) を

$$\begin{pmatrix} \frac{dR}{dt} \\ \frac{dJ}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} \quad (76)$$

と書こう。ここでベクトル  $\vec{x}$  と行列  $A$  を

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}, \quad (77)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (78)$$

とすると、(76) は

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (79)$$

と書き直すことができる。(79) は  $R - J$  平面上の位置  $\vec{x}$  の速度  $d\vec{x}/dt$  が、行列  $A$  と  $\vec{x}$  を用いて表されることを示している。

#### 4.2.1 方向を変えない解

(79) の  $\vec{x}$  は原点から見た位置ベクトルである。ここで、 $\vec{x}$  が  $\alpha$  を定数として

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \alpha\vec{x} \quad (80)$$

のように変化すると仮定しよう。この時、 $\vec{x}$  は時間的にその方向を変えない (図 27)。実際、(80) の解は  $C$  を定数、 $\vec{x}_0$  をある定ベクトルとして

$$\vec{x}(t) = Ce^{\alpha t}\vec{x}_0 \quad (81)$$

と書ける。これは、定ベクトル  $\vec{x}_0$  の方向に伸びる直線上を、 $\alpha > 0$  なら原点から遠ざかる方向へ、 $\alpha < 0$  なら原点に近づく方向へ移動する点を表している。

(80) を満たす  $\vec{x}$  が (79) の解であるためには

$$A\vec{x} = \alpha\vec{x} \quad (82)$$

でなくてはならない。ある行列  $A$  に対して (82) のような関係を満たすベクトル  $\vec{x}$  と定数  $\alpha$  を、それぞれ行列  $A$  の固有ベクトル、固有値という。すなわち、行列  $A$  の固有ベクトルは、(79) の解のうちで方向を変えないで原点からの距離だけが変化するものを表しており、その解が原点に近づくのか、遠ざかるのかは固有値の正負で決まるのである。

#### 4.2.2 固有値問題

行列  $A$  の固有値、固有ベクトルを求めよう。(82) を具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (83)$$

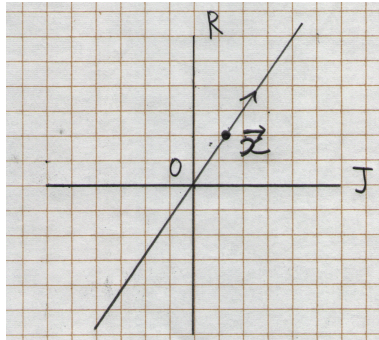


図 27: 時間とともに一方向へ動く解。

であるので、変形すると

$$\begin{pmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (84)$$

と書ける。(84) が  $(x, y) = (0, 0)$  以外の解を持つためには、行列

$$\begin{pmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{pmatrix} \quad (85)$$

が逆行列を持ってはならない。このための条件は (85) の行列式が 0 となることで

$$\begin{vmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (86)$$

$$\therefore (a - \alpha)(d - \alpha) - bc = 0 \quad (87)$$

$$\therefore \alpha^2 - (a + d)\alpha + ad - bc = 0 \quad (88)$$

である。(88) を固有方程式という。(行列に関するこのあたりの知識は線形代数の教科書を参照のこと。)(88) は  $\alpha$  に対する 2 次方程式であるので、これを解けば  $\alpha$  が求まり、 $\alpha$  が求まれば (83) から固有ベクトル  $(x, y)$  も求まることになる。

#### 4.2.3 ケーススタディ

具体的な場合を考えてみよう。

ケース 1: ジュリエットが慎重な場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (89)$$

の場合、固有方程式は

$$\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0 \quad (90)$$

であるから、固有値は  $\alpha = 1, -3$  である。対応する固有ベクトルは、 $\alpha_1 = 1$  に対して  $\vec{x}_1 = (1, 0)$  方向、 $\alpha_2 = -3$  に対して  $\vec{x}_2 = (1, -4)$  方向である。これらの組み合わせに対して、

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha_1 t} \vec{x}_1 \quad (91)$$

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha_2 t} \vec{x}_2 \quad (92)$$

は (79) の解である。まずこれら 2 つの解を位相図に表し、次いでその他の解をこれらの解と矛盾しないように描き加えたものが図 28 である。

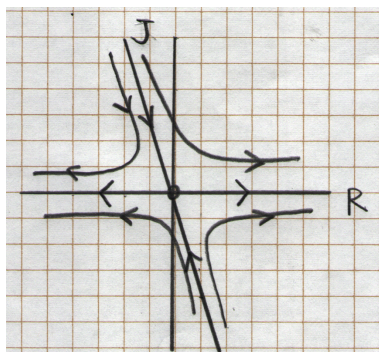


図 28: ジュリエットが慎重な場合。

時間  $t \rightarrow \infty$  で、 $(R, J) \rightarrow (\infty, 0)$  もしくは  $(R, J) \rightarrow (-\infty, 0)$  が平衡点である。残念ながらジュリエットはどうあれ無関心であり、初期条件に応じてロミオは愛憎両極端となる。

ケース 2: ロミオがひねくれタイプな場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (93)$$

の場合、固有方程式は

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \quad (94)$$

であるから、固有値は  $\alpha = 1, -2$  である。対応する固有ベクトルは、 $\alpha_1 = 1$  に対して  $\vec{x}_1 = (4, 1)$  方向、 $\alpha_2 = -2$  に対して  $\vec{x}_2 = (1, 1)$  方向である。これらの解とその他の解を描いたものが図 29 である。この場合、平衡点は  $(\infty, \infty)$  か、 $(-\infty, -\infty)$  である。面白いのは、第 1 象限に初期値があったとしても必ずしもハッピーエンドにならないところであろう。

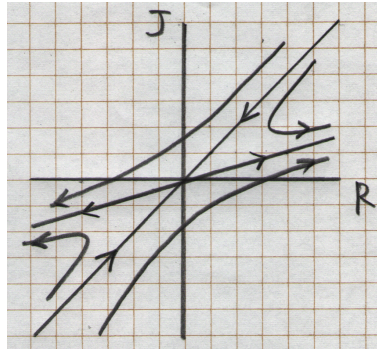


図 29: ロミオがひねくれタイプ。

#### 4.2.4 固有値の種類と平衡点の安定性

上の例で、固有ベクトルはその上を  $\vec{x}$  がそれずに流れる軸であり、固有値の正負が流れが原点向きか、そうでないかを決定することが分かったであろう。この例のような線形問題では、特殊な場合（例えば全空間が平衡点である場合など）を除いて原点のみが平衡点である。言い換えると、孤立した平衡点は原点のみである。このとき、平衡点の安定性は下記のようにまとめられる。

すべての固有値の実部が負のとき： 平衡点は漸近安定 (95)

すべての固有値の実部が 0 のとき： 平衡点は中立安定 (96)

上記以外： 平衡点是不安定 (97)

ここで漸近安定とは、平衡点周囲の流れが時間とともに平衡点に収束することであり、中立安定とは、平衡点周囲の流れが、平衡点から一定の距離にとどまる状態のことである。図 25、図 26 のような状況が中立安定である。

固有値の実部、と書いたわけは、固有値は一般的に複素数であるからである。固有値の虚部が 0 出ない場合、流れは平衡点の周囲を回転する。以上、固有値の種類と孤立した平衡点の安定性をまとめると、図 30-31 のようになる。それぞれ、漸近安定 (図 30)、中立安定 (図 31)、不安定 (図 32) である。

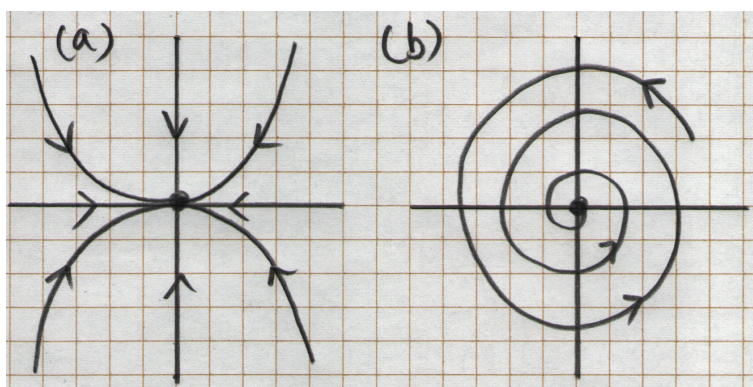


図 30: (a) 固有値が実数で、全て負の場合。(b) 固有値が複素数で、実部が負の場合。

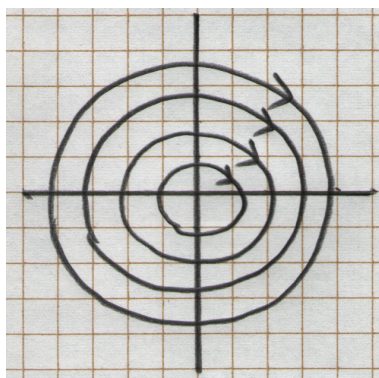


図 31: 固有値が純虚数の場合。

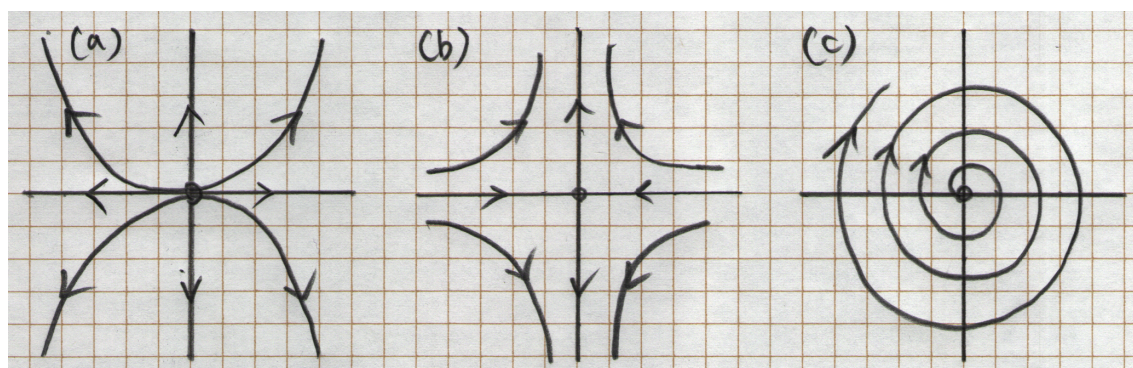


図 32: (a) 固有値が実数で、全て正の場合。(b) 固有値が実数で正負の場合。(c) 固有値が複素数で、実部が正の場合。