⓪ 臨界型 Hardy 不等式の数学解析 (その1)(その2)

福岡大学 レクチャーシリーズ
90分 × 2

1 Intro. 基本事項

(1) 劣臨界 Hardy 不等式 (L^2型)

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\underbrace{\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u}_{\text{動径微分}}\Big|^2 dx \quad \left(\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)$$

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (\subset H^1(\mathbb{R}^N))$$

① 定数 $\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ は最良 i.e

$$\inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\\ u\neq 0}} \underbrace{\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2}\,dx}\right)}_{``Q_H(u,\,\mathbb{R}^N)"} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 .$$

下限は達成されない

② $u_*(x) = |x|^{\frac{2-N}{2}}$: "Virtual minimizer" i.e

$$-\Delta u_* = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u_*}{|x|^2} \quad \text{in } \mathbb{R}^N\setminus\{0\} \text{ の解}$$

(E-L 方程式の解)

しかし $u_* \notin H^1(\mathbb{R}^N)$
$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_*|^2 dx = \infty \\ &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_*^2(x)}{|x|^2}\,dx = \infty \end{aligned}\right.$$

③ スケール変換 $u(x) \longmapsto u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ $(\lambda > 0)$ で

不等式 (or Hardy 商) は不変
$$Q_H(u,\mathbb{R}^N) = Q_H(u_\lambda,\mathbb{R}^N)$$

(2)　(シャープ) 臨界 Hardy 不等式 (L^2 型)

$B \subset \mathbb{R}^2$: 単位円板

$$\frac{1}{4}\int_B \frac{w(x)^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2}\,dx \le \int_B \left|\frac{x}{|x|}\cdot\nabla w\right|^2 dx \quad \left(\le \int_B |\nabla w|^2 dx\right)$$

$$\forall w \in C_0^\infty(B) \subset H_0^1(B)$$

(:)

公式
$$\mathrm{div}\left(\frac{x}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)}\right) = \frac{1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2}$$
から

$$\mathrm{div}\left(\frac{x}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{q}}\right) = \frac{q}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{q+1}} \quad (q \neq 0)$$

$$\int_B \frac{w^2(x)}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2}\,dx = \int_B w^2(x)\,\mathrm{div}\left(\frac{x}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)}\right)dx$$

$$= \left|-2\int_B w\nabla w\cdot\frac{x}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)}\,dx\right|$$

$$\overset{C-S}{\le} 2\left(\int_B \frac{w(x)^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2}\,dx\right)^{1/2}\left(\int_B\left|\frac{x}{|x|}\cdot\nabla w\right|^2 dx\right)^{1/2} \quad //$$

① 定数 $\overset{C_H(B)}{1/4}$ は最良で達成されない (証明中の C-S 不等式の等号成立条件みたされない) (J. Byeon - TF 2019 CCM, Ioku-Ishiwata 2015 IMRN ($\Omega = B$ のとき))

(注) 一般の $\Omega \subseteq B$ に対して

$$C_H(\Omega) := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega)\\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2 dx}{\int_\Omega \frac{w^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2}\,dx}$$

の値は $\Omega \subset B$ に依存しうるが

(or $\partial\Omega \cap \partial B$ 滑らか)

・ $0 \in \Omega$ (内点) $\Rightarrow C_H(\Omega) = 1/4$

(Byeon - TF '19)

・ $C_H(\Omega) = 1/4 \Rightarrow C_H(\Omega)$ は達成されない

(④ の 注 に続ける)

② $w_*(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{1/2}$: "virtual minimizer"

i.e E−L 方程式

$$-\Delta w_* = \frac{1}{4} \frac{w_*(x)}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^2}$$

$(x \in B \setminus \{0\})$ の解 $w_* \notin H^1(B)$

しかし $\int_B |\nabla w_*|^2 dx = \infty$

③ 非線形スケール変換での準不変性

$$w_\lambda(y) := w(x) \qquad y = |x|^\lambda \cdot \frac{x}{|x|} \quad (x \in \Omega) \quad \lambda > 0$$

$$\Omega_\lambda := \left\{ y = |x|^\lambda \cdot \frac{x}{|x|} : x \in \Omega \right\}$$

極座標表示で $y = s\omega$, $s = |y|$ とすると $s = r^\lambda$

($\Omega = B$ のとき) $x = r\omega$, $r = |x|$ $\qquad w_\lambda(s,\omega) = w(r,\omega)$

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial w_\lambda}{\partial s}(s,\omega) \right|^2 s\, ds = \int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \cdot s\, ds \qquad ds = \left(\frac{ds}{dr}\right) dr$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 \left(\frac{dr}{ds} \right) s\, dr = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 r\, dr$$

$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{\lambda} s^{\frac{1}{\lambda}-1}$, $s^{\frac{1}{\lambda}} = r$

この両辺を $\int_{S^1} (\cdots) dS_\omega$ して $\int_B \left| \frac{y}{|y|} \cdot \nabla w_\lambda(y) \right|^2 dy = \frac{1}{\lambda} \int_B \left| \frac{x}{|x|} \cdot \nabla w(x) \right|^2 dx$

同様に

$$\int_0^1 \frac{w_\lambda^2(s,\omega)}{s^2 \left(\log \frac{1}{s}\right)^2} s\, ds = \int_0^1 \frac{w^2(r,\omega)}{s \left(\log \frac{1}{r}\right)^2} \left(\frac{ds}{dr}\right) dr$$

$\frac{1}{s} = \left(\frac{1}{r}\right)^\lambda$, $s = r^\lambda$, $\frac{ds}{dr} = \lambda r^{\lambda-1}$

注 $\Omega = B_R$ のとき

$\Omega_\lambda = (B_R)_\lambda = B_{R^\lambda}$

(半径 R^λ の円板)

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{w^2(r,\omega)}{r \left(\log \frac{1}{r}\right)^2} dr$$

この両辺を $\int_{S^1} (\cdots) dS_\omega$ して

$$\int_B \frac{|w_\lambda(y)|^2}{|y|^2 \left(\log \frac{1}{|y|}\right)^2} dy = \frac{1}{\lambda} \int_B \frac{|w(x)|^2}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^2} dx \quad //$$

非線形スケール変換についての補足

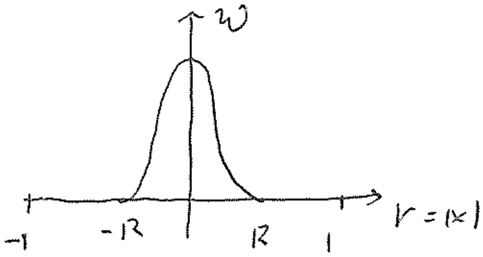
$$w_\lambda(y) = w(x) \qquad y = |x|^\lambda \cdot \frac{x}{|x|} \in \Omega_\lambda$$

$$= w\left(|y|^{\frac{1}{\lambda}} \cdot \frac{y}{|y|}\right) \qquad |y| = |x|^\lambda \iff |x| = |y|^{\frac{1}{\lambda}}$$

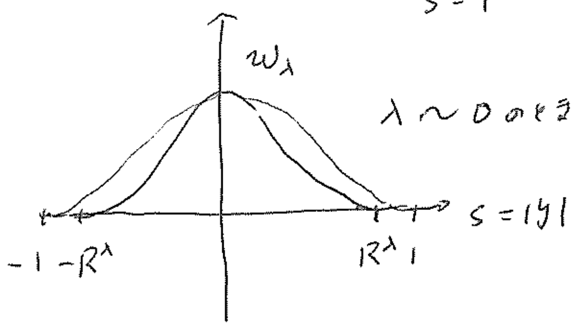
$$\frac{y}{|y|} = \omega = \frac{x}{|x|}$$

w が球対称のとき w_λ も球対称 $\quad w_\lambda(s) = w(r) = w(s^{\frac{1}{\lambda}})$

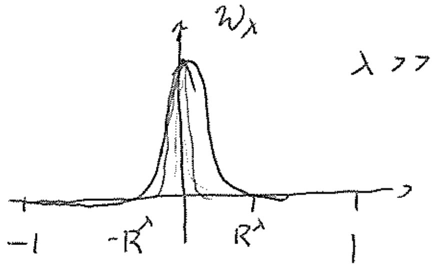
$$s = r^\lambda$$



$0 < R < 1$



$\lambda \sim 0$ のとき



$\lambda \gg 1$ のとき

w_λ $(\lambda \sim 0)$ は w を"引き伸ばした"

プロファイルを持つ

w_λ $(\lambda \gg 1)$ は w を"縮めた"

$$\Theta(w,\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2 dx}{\int_\Omega \frac{w^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^2} dx} = \Theta_R(w,\Omega) + \Theta_S(w,\Omega)$$

$$|\nabla w|^2 = \left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|^2 + \frac{1}{r^2}|\nabla_{S^1} w|^2$$

$$\Theta_R(w,\Omega) = \frac{\int_\Omega \left|\frac{x}{|x|}\cdot\nabla w\right|^2 dx}{\int_\Omega \frac{w^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^2}}, \quad \Theta_S(w,\Omega) = \frac{\int_\Omega \frac{1}{|x|^2}|\nabla_{S^1} w|^2 dx}{\int_\Omega \frac{w^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^2}} \quad \text{とおくと}$$

radial $\qquad$ spherical

準不変性

$$\Theta(w_\lambda,\Omega_\lambda) = \Theta_R(w_\lambda,\Omega_\lambda) + \Theta_S(w_\lambda,\Omega_\lambda) = \Theta_R(w,\Omega) + \lambda^2\Theta_S(w,\Omega)$$

$$\int_{\Omega_\lambda} \frac{1}{|y|^2} |\nabla_{S^1} w_\lambda|^2 dy$$

$$w_\lambda(s, \omega) = w(r, \omega)$$

$$s = r^\lambda$$

$$\frac{ds}{dr} = \lambda r^{\lambda-1} = \frac{\lambda s}{r}$$

$$= \int_{S^1} \int_0^1 \frac{1}{s^2} |\nabla_{S^1} w_\lambda(s, \omega)|^2 s \underbrace{ds}_{= \frac{ds}{dr} dr} dS_\omega$$

$$= \int_{S^1} \int_0^1 \frac{1}{s^2} |\nabla_{S^1} w(r, \omega)|^2 s \cdot \frac{\lambda s}{r \lambda} \, dr \, dS_\omega$$

$$= \lambda \int_{S^1} \int_0^1 \frac{1}{r} |\nabla_{S^1} w(r, \omega)|^2 dr \, dS_\omega = \lambda \int_\Omega \frac{1}{|x|^2} |\nabla_{S^1} w|^2 dx$$

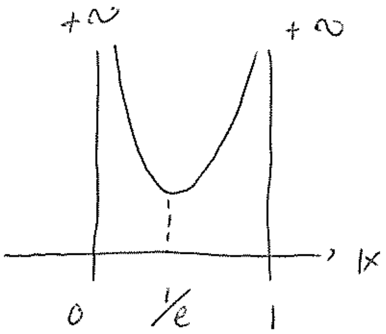
$$\left(\nabla = \omega \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{S^1} \qquad \omega \perp \nabla_{S^1} \equiv 0 \right)$$

$$\therefore \int_{\Omega_\lambda} \frac{1}{|y|^2} |\nabla_{S^1} w_\lambda|^2 dy = \lambda \int_\Omega \frac{1}{|x|^2} |\nabla_{S^1} w|^2 dx$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_R(w_\lambda, \Omega_\lambda) &= \Theta_R(w, \Omega) \\ \Theta_S(w_\lambda, \Omega_\lambda) &= \lambda^2 \Theta_S(w, \Omega) \end{aligned} \right\}$$ のスケール則

(注) $\Omega = B \subset \mathbb{R}^2$ のとき 重み関数 $x \mapsto W(x) = \dfrac{1}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^2}$ は

原点でも 境界 ∂B での特異（非有界）



・$|x|$に関して単調でない

← 対称化の議論の適用が難

$|x| \sim 0$ のとき $\quad |x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^2 >> |x|^2$ ∴ 原点近くの特異性を弱めている

$W(x) << \frac{1}{|x|^2}$

$|x| \sim 1$ のとき $\quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \cdots < t$ より

$$|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^2 = |x|^2 \left(\log \left(1 + \left(\frac{1}{|x|} - 1\right)\right)\right)^2$$

$$< |x|^2 \left(\frac{1}{|x|} - 1\right)^2 = (1 - |x|)^2$$

∴ $|x| \sim 1$ で $\quad W(x) > \dfrac{1}{(1-|x|)^2}$ 　境界近くの特異性の方が強い

(3) 劣臨界・臨界 Hardy 不等式をつなぐ変換

(Sano-TF 2017 CVPDE)

$$\begin{cases} u = u(x) = u(r) & r = |x| & u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \\ w = w(y) = w(s) & s = |y| & w \in C_0^\infty(B) \end{cases}$$

$B \subset \mathbb{R}^2$ 単位円板

球対称

左辺を右辺で 定義
or 右辺を左辺で

変数変換 $\begin{cases} u(r) = w(s) \\ u_*(r) = \boxed{r^{\frac{2-N}{2}} = \left(\log \frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}}} = w_*(s) \end{cases}$

virtual minimizer 同士をつなぐ

r	0 …… ∞
s	0 …… 1

$$r^{2-N} = \left(\log \frac{1}{s}\right) \qquad \therefore \ (2-N) r^{1-N} \frac{dr}{ds} = -\frac{1}{s}$$

基本解同士をつなぐ

$$\therefore \ \frac{dr}{ds} = \frac{r^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{s}\right)$$

Ⓐ

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \omega_{N-1} \int_0^\infty |u'(r)|^2 r^{N-1} dr$$

$$= \omega_{N-1} \int_0^1 |w'(s)|^2 \left(\frac{ds}{dr}\right)^{\cancel{2}} r^{N-1} \cancel{\left(\frac{dr}{ds}\right)} ds$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{(N-2)}{r^{N-1}} s$$

$$= \frac{\omega_{N-1}}{2\pi} 2\pi \int_0^1 |w'(s)|^2 (N-2) s \, ds$$

$$= \frac{\omega_{N-1}}{2\pi} (N-2) \int_B |\nabla w|^2 dy$$

(B) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\,dx = \omega_{N-1}\int_0^\infty \frac{|u(r)|^2}{r^2} r^{N-1}\,dr$

$$= \omega_{N-1}\int_0^1 \frac{|w(s)|^2}{r^2} r^{N-1}\left(\frac{dr}{ds}\right) ds$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{r^{N-1}}{N-2}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{\omega_{N-1}}{N-2}\int_0^1 |w(s)|^2 \left(\frac{r^{2N-4}}{s}\right) ds \qquad r^{2N-4} = \left(\log\frac{1}{s}\right)^{-2}$$

$$= \frac{\omega_{N-1}}{2\pi}\left(\frac{1}{N-2}\right) 2\pi \int_0^1 \frac{|w(s)|^2}{s^2\left(\log\frac{1}{s}\right)^2}\, s\,ds$$

$$= \frac{\omega_{N-1}}{2\pi}\left(\frac{1}{N-2}\right)\int_B \frac{|w(y)|^2}{|y|^2\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^2}\,dy$$

$\therefore$ (A) $- \dfrac{(N-2)^2}{4} \times$ (B)

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2}\,dx$$

$$= \frac{\omega_{N-1}}{2\pi}(N-2)\left\{\int_B |\nabla w|^2 dy - \frac{1}{4}\int_B \frac{|w(y)|^2}{|y|^2\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^2}\,dy\right\}$$

$\boxed{(\mathbb{R}^N\text{での劣臨界 Hardy 差}) = (\text{定数}) \times (B \subset \mathbb{R}^2\text{での臨界 Hardy 差})}$ //

(4) スケール変換との関係

$u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$
$w \in C_0^\infty(B)$
球対称のとき

$u \longmapsto u_\mu(r) = u(\mu r) \qquad r=|x|,\ x \in \mathbb{R}^N$

$w \longmapsto w_\lambda(s) = w(s^\lambda) \qquad s=|y|,\ y \in B \subset \mathbb{R}^2$

ここで
$$\left\{ \begin{array}{l} w(\boxed{s}) = u(\boxed{r}) \\ \log \dfrac{1}{\boxed{s}} = \boxed{r}^{\,2-N} \end{array} \right. \quad \text{のとき} \quad \text{—— } (*)$$

$\log \dfrac{1}{\boxed{}} = \boxed{}^{\,2-N}$ のとき $w(\boxed{}) = u(\boxed{})$

$$\log\left(\frac{1}{\boxed{s^\lambda}}\right) = \lambda \log \frac{1}{s} \overset{(*)}{=} \lambda r^{2-N} = \left(\boxed{\lambda^{\frac{1}{2-N}} r}\right)^{2-N}$$

$$\therefore \underset{(*)\text{から}}{\wedge} \quad w(s^\lambda) = u(\underbrace{\lambda^{\frac{1}{2-N}}}_{=\mu} r)$$

$\mu = \lambda^{\frac{1}{2-N}}$ とおくと $w_\lambda(s) = u_\mu(r)$

変換 (*) はスケール不変構造を保存している

//

2. 有界領域上の平均ゼロ関数に対するHardy不等式

(1) Chabrowski-Peral-Ruf (CCM. 2010)

$0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ $N \geq 3$ 滑らかな有界領域

劣臨界 Hardy 最良定数

$$H(\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx = 1 \right\}$$

$$= \left(\frac{N-2}{2} \right)^2$$

$$N(\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx : u \in H^1(\Omega), \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx = 1 \right.$$

$$\left. \underline{\int_\Omega \frac{u}{|x|^2} dx = 0} \right\}$$

$L^2(\Omega, \frac{1}{|x|^2})$ で $\perp$ 定数関数

◎ Chabrowski-Peral-Ruf の主結果

① $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3 \Rightarrow N(\Omega) > 0$

② 常に $N(\Omega) \leq H(\Omega) = \left(\frac{N-2}{2} \right)^2$

もし $N(\Omega) < H(\Omega) \Rightarrow N(\Omega)$ は達成される

③ $B \subset \mathbb{R}^N$ 単位球のとき $N(B) < \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 \Leftarrow N \geq 7$

(十分条件)

④ $N(\mathbb{R}^N) = H(\mathbb{R}^N) = \left(\frac{N-2}{2} \right)^2$

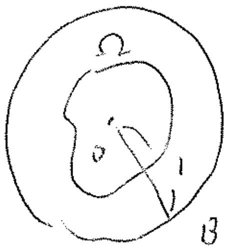
$N(B)$ は $N \geq 7$ で達成される

(注) Byeon-Jeon-TI:

$3 \leq N \leq 6$ で $N(B)$ は達成されない

(2) Sano–TF (J. Geom. Anal 2024)

$0 \in \Omega \subset B \subset \mathbb{R}^2$ $\quad R_\Omega := \sup_{x \in \Omega} |x| < 1$ を仮定



$$H_R(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^2} dx = 1 \right\}$$

$= \frac{1}{4}$ （$0 \in \Omega$ を仮定しているので）

$$N_R(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx : u \in H^1(\Omega), \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^2} dx = 1, \int_\Omega \frac{u}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^2} dx = 0 \right\}$$

このとき

① $R = R_\Omega \in (0,1) \Rightarrow N_R(\Omega) > 0$

② $N_R(\Omega) \leq H_R(\Omega)$ もし $N_R(\Omega) < \overset{\frac{1}{4}}{\overset{\shortparallel}{H_R(\Omega)}} \Rightarrow N_R(\Omega)$ は達成される

③ $\Omega = B_R$：半径 R の円板 $\Rightarrow N_R(B_R) < C \log\left(\frac{1}{R}\right)$

特に $R < 1$, R は1に十分近い $\Rightarrow N_R(B_R) < 1/4$

（よって $N_R(B_R)$ は達成される）

(3) Byeon - Jeon - TF (submitted)

重み付き(劣臨界)Hardy 不等式

$0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ 滑らかな有界領域, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) := \overline{\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty\}}^{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}}$$

$$\mathcal{H}^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega) := \overline{\{u \in C_0^\infty(\Omega) : \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty\}}^{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}}$$

ここに
$$\|u\|^2_{\alpha,\beta} = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 |x|^{2\beta} + \frac{u^2}{|x|^{2\alpha}} \right) dx$$

$$H_{\alpha,\beta}(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 |x|^{2\beta} dx : u \in H^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega), \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2\alpha}} dx = 1 \right\}$$

$$N_{\alpha,\beta}(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 |x|^{2\beta} dx : u \in H^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega), \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2\alpha}} dx = 1, \underline{\int_\Omega \frac{u}{|x|^{2\alpha}} dx = 0} \right\}$$

$u \perp$ 定数 in $L^2(\Omega, \frac{1}{|x|^{2\alpha}})$

$H_{1,0}(\Omega) = H(\Omega)$
$N_{1,0}(\Omega) = N(\Omega)$) Chabrowski-Peral-Ruf が考察したもの

(以下、次ページも省略)

① $N_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0 \overset{必+}{\Longleftrightarrow} \alpha + \beta \leq 1$ かつ $(\alpha, \beta) \neq \left(\frac{N}{2}, 1 - \frac{N}{2}\right)$

$H_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow$ 〃

②
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta < 1 \\ 2\alpha + \beta < 1 + \frac{N}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow N_{\alpha,\beta}(\Omega) \text{ は達成される}$$

$N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の最小化元 u は $u \in \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) \cap C^2(\Omega \setminus \{0\})$ で

次の E-L 方程式の解

$$
\begin{cases}
-\mathrm{div}\left(|x|^{2\beta}\nabla u\right) = N_{\alpha,\beta}(\Omega)\dfrac{u}{|x|^{2\alpha}} + \dfrac{\mu u}{|x|^{2\alpha}} & \text{in } \Omega \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega
\end{cases}
$$

さらに $\alpha < N/2 \Rightarrow \mu = 0$ (Lagrange乗数)

(注 $\alpha < N/2$ のとき $1 \in \tilde{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)$)

③ $\begin{cases} \alpha + \beta \leq 1 \\ 2\alpha + \beta \geq 1 + \frac{N}{2} \end{cases} \Rightarrow N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は達成されない

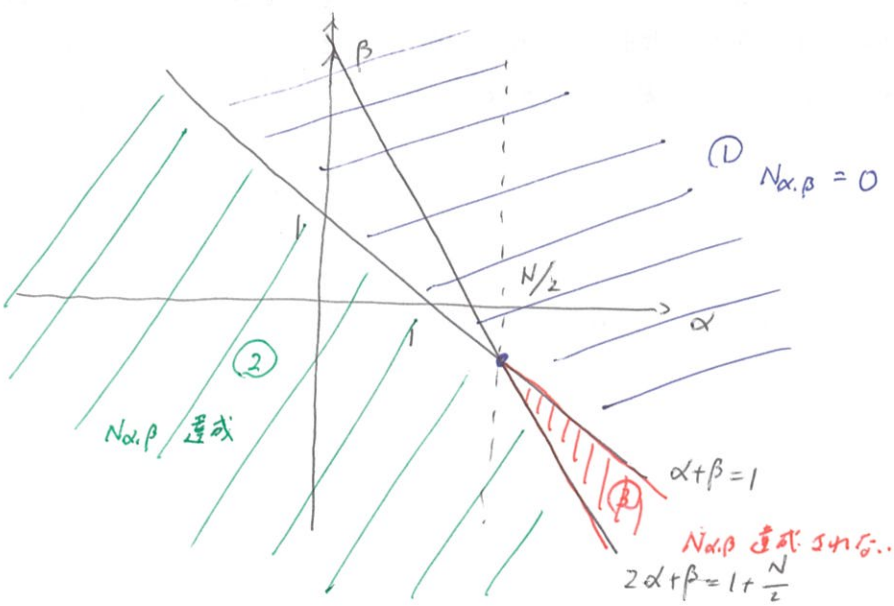
④ $\alpha \leq N/2 \Rightarrow N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) \leq H_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) = \left(\frac{N-2\alpha}{2}\right)^2$

もし $N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) < H_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) \Rightarrow N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)$ は達成される

⑤ $N_{\alpha,1-\alpha}(B)$ が達成される $\overset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} \alpha \leq N/2 - \sqrt{N-1}$

注 特に $\alpha = 1$ のとき $1 \leq \frac{N}{2} - \sqrt{N-1} \Leftrightarrow N \geq 4 + 2\sqrt{2} \fallingdotseq 6.82$

$\therefore$ $N_{1,0}(B)$ が達成される $\overset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} N \geq 7$



② 2次元重み付き臨界Hardy不等式は？

$0 \in \Omega \subset B \qquad R_\Omega = \sup_{x \in \Omega} |x| < 1$ 仮定 $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega) := \overline{\{ u \in C_0^\infty(\Omega) : \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty \}}^{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}}$$

$$\mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) := \overline{\{ u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty \}}^{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}}$$

ただし $\displaystyle \|u\|^2_{\alpha,\beta} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx + \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx$

(注) $u \in \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の意味

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $u \in L^2\left(\Omega, \dfrac{1}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\right)$, $\exists \varphi_j \in C^\infty(\Omega)$, $\|\varphi_j\|_{\alpha,\beta} < \infty$ s.t.

$\exists \vec{v} \in L^2\left(\Omega, \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\beta}\right)$ $\mathbb{R}^2$値関数

$$\begin{cases} \displaystyle \int_\Omega \frac{|u - \varphi_j|^2}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty) \\ \displaystyle \int_\Omega |\vec{v} - \nabla \varphi_j|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty) \end{cases}$$

$\vec{v}$ を ∇u と記す （$L^2\left(\Omega, \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\beta}\right)$ - 強微分）

実は $\begin{cases} \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ \vec{v} \text{ は } u \text{ の超関数微分} \underset{\hat{\nabla} u}{} \text{ と一致} \end{cases}$ がわかる

$$H_{\alpha,\beta}(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx : u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega) \,;\, \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx = 1 \right\}$$

$$N_{\alpha,\beta}(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx : u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) \,.\, \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx = 1 \right.$$

$$\left. \int_\Omega \frac{u}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx = 0 \right\}$$

(注) $\dfrac{1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} \in L^1(\Omega) \iff \alpha > 1/2$

3. 結果（Byeon - Sano - TF 準備中）

<u>Thm 1</u>（$N_{\alpha,\beta}(\Omega)$, $H_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の正値性）

$N_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0 \overset{\text{必+}}{\iff} \alpha+\beta \geq 1$ かつ $(\alpha,\beta) \neq (1/2, 1/2)$

$H_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0 \overset{\text{必+}}{\iff}$ 〃

<u>Thm 2</u>（$H_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の達成可能性）

$\alpha+\beta > 1 \implies H_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は達成される

<u>Thm 3</u>（$N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の達成可能性）

$\begin{cases} \alpha+\beta > 1 \\ 2\alpha+\beta > 3/2 \end{cases} \implies N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は達成される

<u>Thm 4</u>（$N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の達成不可能性）

$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 1 \\ 2\alpha+\beta \leq 3/2 \end{cases} \implies N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は達成されない

Thm 5 ($\alpha+\beta=1$ のとき)

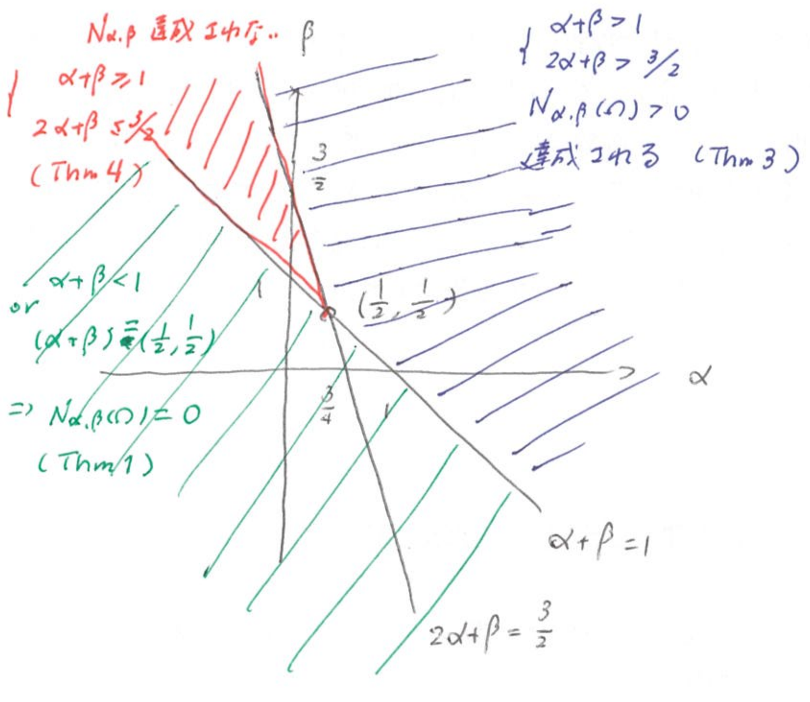
$$\alpha \geq 1/2 \Rightarrow N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) \leq H_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) = \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2$$

もし $N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) < H_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) \Rightarrow N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)$ は達成される

Thm 6 ($N_{\alpha,1-\alpha}(B_R)$ の達成可能性)

$R\in(0,1)$ もし $\alpha > 1+\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\log\frac{1}{R}\right)^2}$

$\Rightarrow$ $N_{\alpha,1-\alpha}(B_R)$ は達成される



Thm 3 ($N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の達成可能性) の追加

$\begin{cases}\alpha+\beta>1\\ 2\alpha+\beta>3/2\end{cases}$ のときの $N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ - 最小化元 $u\in H^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は $u\in C^2(\Omega\setminus\{0\})$

次の E-L 方程式の解

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta}\nabla u\right) = N_{\alpha,\beta}(\Omega)\dfrac{u}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} + \dfrac{\exists\mu}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$\mu\in\mathbb{R}$: Lagarange 乗数　さらに $\alpha > 1/2$ (このとき $1\in L^1\left(\Omega, \frac{1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\right)$ に注意)

のときは $\mu=0$

4. 証明の基本道具

(1) <u>基本不等式</u> $0\in\Omega\subset B\subset\mathbb{R}^2$

$\alpha\in\mathbb{R}$

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\,dx \le \int_\Omega \left|\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u\right|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)}dx$$

$$\forall u\in H^{1,2}_{0,\alpha,1-\alpha}(\Omega)$$

(∵) 公式 $\mathrm{div}\left(\dfrac{x}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha-1}}\right)=\dfrac{2\alpha-1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}$ と発散定理から。//

さらに $H_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)=\left(\alpha-1/2\right)^2$，達成されない と示せる。

(2) <u>スケール則</u> $\lambda>0$ $u\in\mathcal{H}^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega)$ $\left(\overset{0\text{拡張}}{\subset}\mathcal{H}^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(B)\right)$

非線形スケール変換 $u_\lambda(y)=u(x)$，$y\in\Omega_\lambda:=\left\{|x|^\lambda\frac{x}{|x|}\ ;\ x\in\Omega\right\}$

の下で

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega_\lambda}\left|\frac{y}{|y|}\cdot\nabla u_\lambda(y)\right|^2\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^{2\beta}dy=\lambda^{2\beta-1}\int_\Omega\left|\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u(x)\right|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta}dx\\[2ex]\displaystyle\int_{\Omega_\lambda}\frac{|u_\lambda(y)|^2}{|y|^2\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^{2\alpha}}dy=\lambda^{1-2\alpha}\int_\Omega\frac{|u(x)|^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}dx\\[2ex]\displaystyle\int_{\Omega_\lambda}\frac{1}{|y|^2}\left|\nabla_S u_\lambda(y)\right|^2\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^{2\beta}dy=\lambda^{2\beta+1}\int_\Omega\frac{1}{|x|^2}\left|\nabla_S u(x)\right|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta}dx\end{cases}$$

$(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ $u\in\mathcal{H}^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega)$

これから $\nabla = \omega \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\nabla_{s}$. $\quad x = r\omega = r\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$

$r = |x|$

$|\nabla u|^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}|\nabla_{s} u|^2$ に注意して $\quad \dfrac{\partial}{\partial r} = \dfrac{x}{|x|}\cdot\nabla$ 動径微分

$$\Theta(u_\lambda, \Omega_\lambda) = \frac{\displaystyle\int_{\Omega_\lambda} |\nabla u_\lambda|^2 \left(\log\frac{1}{|y|}\right)^{2\beta} dy}{\displaystyle\int_{\Omega_\lambda} \frac{|u_\lambda(y)|^2}{|y|^2\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^{2\alpha}}\, dy}$$

$$= \lambda^{2(\alpha+\beta-1)} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} \left|\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u\right|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx}{\displaystyle\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\, dx} + \lambda^{2(\alpha+\beta)} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2}|\nabla_{s} u|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta}}{\displaystyle\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\, dx}$$

となる. $= \lambda^{2(\alpha+\beta-1)}\Theta_{R}(u, \Omega) + \lambda^{2(\alpha+\beta)}\Theta_{s}(u, \Omega)$

・ u : 球対称 のとき $\nabla_{s} u \equiv 0$ このとき

$$\Theta(u_\lambda, \Omega_\lambda) = \lambda^{2(\alpha+\beta-1)}\Theta(u, \Omega)$$

・ 一般に $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\underline{\lambda \in (0,1)\text{ のとき}}$

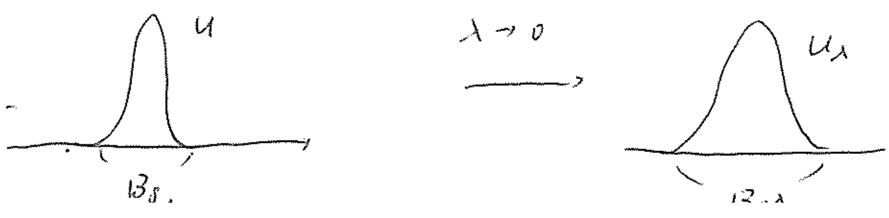
$$\Theta(u_\lambda, \Omega_\lambda) \leq \lambda^{2(\alpha+\beta-1)}\Theta(u, \Omega)$$ 成立

$2(\alpha+\beta-1) < 2(\alpha+\beta)$
$\because \lambda \in (0,1)$
$2(\alpha+\beta-1)\log\lambda > 2(\alpha+\beta)\log\lambda$
$\therefore \lambda^{2(\alpha+\beta-1)} > \lambda^{2(\alpha+\beta)}$

(注)

$\Omega = B_R \ (R \in (0,1))$ のとき $\Omega_\lambda = (B_R)_\lambda = B_{R^\lambda}$

$u \in Y_{0,\alpha,\beta}(\Omega)$, $\operatorname{supp} u = B_{\delta_0}$ のとき $\operatorname{supp} u_\lambda = (\operatorname{supp} u)_\lambda = B_{\delta_0^\lambda}$ より



$\underline{\lambda \to 0 \text{ のとき広がる}}$

集中を防げる

⊙ Thm 2　$H_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の達成可能性について

$\{u_n\} \subset H^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega)$: 最小化列 for $H_{\alpha,\beta}(\Omega)$

$$\Theta(u_n,\Omega) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\, dx} \xrightarrow{n\to\infty} H_{\alpha,\beta}(\Omega)$$

今, $0 \in \Omega \subset\subset B$　重み関数の特異点は原点だけ

$\{u_n\}$ は $\Theta(u_n,\Omega)$ を最小化したい → 原点に集中

u_n のスケール変換　$\{(u_n)_\lambda\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

$\mathrm{supp}\,(u_n)_\lambda = (\mathrm{supp}\,u_n)_\lambda$ は $\lambda \to 0$ で広がる

$(B_{\delta_0})_\lambda = B_{\delta_0/\lambda}$ $(\simeq B,\ \lambda \simeq 0$ のとき$)$

かつ $0<\lambda<1$
$\alpha+\beta-1>0$ のときは

$$\Theta((u_n)_\lambda, \Omega_\lambda) \le \lambda^{2(\alpha+\beta-1)}\,\Theta(u_n,\Omega) \underset{\substack{0<\lambda<1\\ \alpha+\beta-1>0}}{<} \Theta(u_n,\Omega)$$

となって $\{(u_n)_\lambda\}$ も $H_{\alpha,\beta}(\Omega)$-最小化列
しかも集中しない

⊙ $\boxed{\alpha+\beta-1>0 \Rightarrow \text{最小化列の集中現象によるコンパクト性の損失を補償できる}}$

∴

Thm 2　$\alpha+\beta>1 \Rightarrow H_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は達成される　//

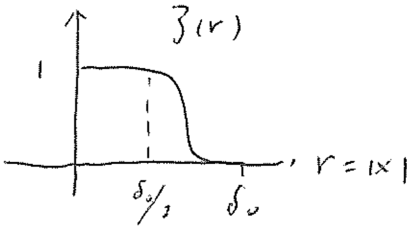
スケール則 ⇒ $\boxed{\alpha+\beta=1}$ (critical line の1つ)

◎ Thm1 ($N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の正値性) の証明のスケッチ

$$\left[\ N_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0 \ \overset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow}\ \begin{cases} \alpha+\beta \geq 1 \\ (\alpha,\beta) \neq (1/2, 1/2) \end{cases}\ \right]$$

① $\alpha+\beta < 1 \Longrightarrow N_{\alpha,\beta}(\Omega) = 0$

(∵) $0 \in \Omega$ $\exists \delta_0 \in (0,1)$ s.t. $B_{\delta_0} \subset\subset \Omega$ としてよい



$$\varphi(|x|) = \begin{cases} \zeta(|x|)\,(C_1 r^{p_1} - C_2 r^{p_2}) & B_{\delta_0} \\ 0 & \Omega \setminus B_{\delta_0} \end{cases}$$

$(p_1, p_2 > 0)$

ここに $C_i^{-1} = \displaystyle\int_0^{\delta_0} \frac{\zeta(r)\, r^{p_i}}{r\,(\log \frac{1}{r})^{2\alpha}}\, dr \quad (i=1,2)$ とおく

$$\left(\Longrightarrow \int_{B_{\delta_0}} \frac{\varphi(x)}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^{2\alpha}}\, dx = 0 \right)$$

この具体形は必要ない。適当な球対称関数 φ で $\displaystyle\int_\Omega \frac{\varphi}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}\,dx = 0$ であればOK

$\varphi_\lambda(y) = \varphi(x)$ $\left(y = |x|^\lambda \frac{x}{|x|},\ x \in B_{\delta_0}\right)$ で $N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ を test

$\mathrm{supp}\,\varphi_\lambda \subset B_{\delta_0^\lambda} \subset B_{\delta_0} \subset \Omega$ $\quad y \in (B_{\delta_0})_\lambda = B_{\delta_0^\lambda} \subset B_{\delta_0}$ ($\lambda > 1$ のとき)

B_{δ_0} の外に 0 拡張して Ω 上の関数と思う

$$N_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \Theta(\varphi_\lambda, \Omega) = \Theta(\varphi_\lambda, (B_{\delta_0})_\lambda) \underset{\varphi:\text{球対称}}{=} \lambda^{2(\alpha+\beta-1)}\, \Theta(\varphi, B_{\delta_0}) \xrightarrow[\alpha+\beta<1]{\lambda \to +\infty} 0$$

//

(注) $$\int_0^R \frac{dr}{r^A (\log\frac{1}{r})^B} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^R \frac{dr}{r^A(\log\frac{1}{r})^B} = \begin{cases} < \infty & (A<1,\ {}^\forall B \in \mathbb{R}) \\ < \infty & (A=1,\ B>1) \\ = \infty & (A=1,\ B \leq 1) \\ = \infty & (A>1,\ {}^\forall B \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

② $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow N_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Omega) = 0$

(∵)

$\varepsilon > 0$ に対し $\Phi_\varepsilon(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-3\varepsilon} - C_0 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-2\varepsilon}$

(C_0 は $\displaystyle\int_\Omega \frac{\Phi_\varepsilon}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^{2\alpha}} dx = 0$ をみたすように定める)

$2\alpha = 1$

$$\begin{cases} \nabla \Phi_\varepsilon(x) = \dfrac{x}{|x|^2} \left(3\varepsilon \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-3\varepsilon - 1} - C_0 2\varepsilon \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-2\varepsilon - 1} \right) \\ |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 \leq C \dfrac{\varepsilon^2}{|x|^2} \left\{ \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-6\varepsilon - 2} + \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-4\varepsilon - 2} \right\} \\ \cancel{\Phi_\varepsilon^2 \leq C \left(\left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-6\varepsilon} + \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-4\varepsilon} \right)} \end{cases}$$

公式

$\delta_0 \in (0,1)$, $A > 0$

$$\boxed{\int_{B_{\delta_0}} \frac{dx}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^{1 + A\varepsilon}} = \frac{2\pi}{A\varepsilon} \left(\log \frac{1}{\delta_0}\right)^{-A\varepsilon} = \frac{2\pi}{A\varepsilon}(1 + o(1))}$$

$o(1) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

∴ $\Theta(\Phi_\varepsilon, \Omega)$ の分母は 積分範囲縮めただけ

$$\int_\Omega \frac{\Phi_\varepsilon^2}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^{2\alpha}} dx \geq \int_{B_{\delta_0}} \frac{\left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-6\varepsilon} - 2C_0 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-5\varepsilon} + C_0^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-4\varepsilon}}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})} dx$$

$2\alpha = 1$ (今. $\alpha = 1/2$)

$$\geq \frac{2\pi}{\varepsilon} \left(\frac{1}{6}(1 + o(1)) - \frac{2C_0}{5}(1 + o(1)) + C_0^2 \frac{1}{4}(1 + o(1)) \right)$$

$$= \frac{2\pi}{\varepsilon} \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5} C_0 + \frac{C_0^2}{4} + o(1) \right)$$

$$= \frac{2\pi}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{4}\left(C_0 - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{150} + o(1) \right\} > 0 \quad \text{(下から真に正)}$$

一方 $\Theta(\varphi_\varepsilon, \Omega)$ の分子　　$\Omega \subset B_R \subset\subset B$ となる B_R を取ると

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{\overset{=1}{2\beta}} dx \leq C\varepsilon^2 \left(\int_{B_R} \frac{\left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-6\varepsilon-1}}{|x|^2} + \frac{\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{-4\varepsilon-1}}{|x|^2} dx \right)$$

$$= C\varepsilon^2 \left(\frac{2\pi}{6\varepsilon} + \frac{2\pi}{4\varepsilon} + o(1) \right) = O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0)$$

$$\therefore \underset{\underset{N_{1/2,1/2}(\Omega)}{\leq}}{\Theta(\varphi_\varepsilon, \Omega)} \leq \frac{O(\varepsilon)}{\frac{C}{\varepsilon}} \leqq C\varepsilon^2 \to 0 \quad (\varepsilon \to 0) \quad //$$

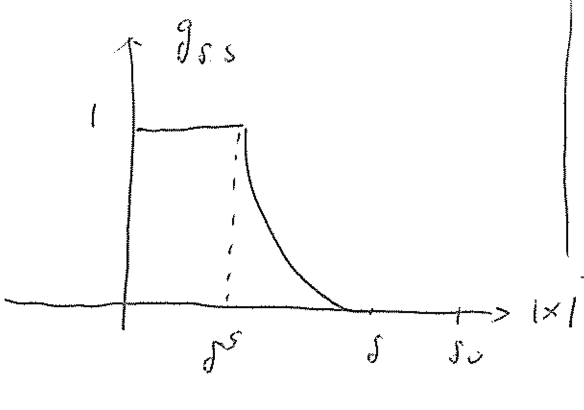
(3) $\underline{H_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0 \Rightarrow N_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0}$

(∵) 対偶を示す　$N_{\alpha,\beta}(\Omega) = 0$ のとき $N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ ー最小化列 $\{u_n\} \subset H^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ を

<u>log log 型 cut-off 関数</u>で cut して $H^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega)$ の関数にして

これで $H_{\alpha\beta}(\Omega)$ を test $\Rightarrow$ $H_{\alpha,\beta}(\Omega) = 0$ が示せる

$\delta_0 > \delta > 0$, $s \in (0,1)$



$$g_{\delta,s}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |x| \leq \delta^s \\ \dfrac{1}{\log s}\left\{\log\log\dfrac{1}{|x|} - \log\log\dfrac{1}{\delta}\right\} & \delta^s \leq |x| \leq \delta \\ 0 & \{|x| \geq \delta\} \cap \Omega \end{cases}$$

①〜④ ok $\Rightarrow$ Thm 1 ok

(4) $\begin{cases} \alpha + \beta \geq 1 \\ (\alpha,\beta) \neq (1/2, 1/2) \end{cases} \overset{必十}{\Longleftrightarrow} H_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0$　は略

//

③ の補足

$$|\nabla g_{\delta,s}|^2 = \left(\frac{1}{\log s}\right)^2 \frac{1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2} \chi_{B_\delta \setminus B_{\delta^s}}$$ に注意

$\{u_n\} \subset H^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)$: $N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ 一最小化列

$\overset{\shortparallel}{0}$ 仮定

このとき $u_n \longrightarrow u$ weakly in $H^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)$

$\overset{\shortparallel}{0}$

$u_n \longrightarrow u \equiv 0$ strongly in $L^2\left(\Omega \setminus B_\delta, \frac{1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\right)$

がわかる

$\underline{v_n := g_{\delta,s} u_n}$ $\in H^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(B_\delta) \underset{0\text{拡張}}{\subset} H^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega)$ で $H_{\alpha,\beta}(\Omega)$ を test

$$|\nabla v_n|^2 \le 2|\nabla u_n|^2 \underbrace{g_{\delta,s}^2}_{\le 1} + 2|\nabla g_{\delta,s}|^2 u_n^2$$

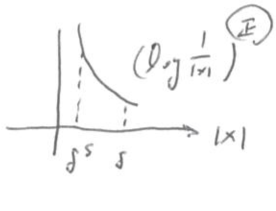
$$\therefore \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx \le 2\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx$$

$$+ \frac{2}{(\log s)^2} \int_{B_\delta \setminus B_{\delta^s}} \frac{u_n^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2} \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx$$

$$= \frac{\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(\alpha+\beta-1)}}{\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}$$

$$\le 2\underbrace{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta} dx}_{\substack{\shortparallel \\ N_{\alpha,\beta}(\Omega)+o(1) \\ \shortparallel \\ o(1)}} + \frac{2}{(\log s)^2}\left(\log\frac{1}{\delta^s}\right)^{2(\alpha+\beta-1)} \underbrace{\int_{B_\delta \setminus B_{\delta^s}} \frac{u_n^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx}_{\substack{\shortparallel \\ o(1)}}$$

仮定 $\alpha+\beta-1 \ge 0$



$\because u_n \xrightarrow{\text{strong}} \overset{0}{u}$ $L^2\left(\Omega, \frac{1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\right)$

となって $H_{\alpha,\beta}(\Omega) = 0$ が示せる //

(3) Thm 3 ($N_{\alpha,\beta}$ の達成可能性), Thm 4 ($N_{\alpha,\beta}$ の達成不可能性)

$\Rightarrow$ もう1つの critical line $\boxed{2\alpha+\beta=\frac{3}{2}}$

$\sim$ 平均作用素 $T_0 : \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) \to \mathbb{R}$ の連続性 (有界性)

$$T_0(u) = \int_\Omega \frac{u(x)}{|x|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\, dx \qquad (\text{linear})$$

$N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の制約条件の1つ $\{u \in \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) : T_0(u) = 0\}$ の (弱) 閉性 が必要

Prop 1 (T_0 の連続性)
$2\alpha+\beta > \frac{3}{2}$ または $\alpha > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $T_0 : \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) \to \mathbb{R}$ は
線形連続汎関数 : $T_0 \in \left(\mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*$

(:)

$\alpha > \frac{1}{2}$ のときは $\frac{1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} \in L^1(\Omega)$ より簡単

$$|T_0(u)| \leq \int_\Omega \frac{|u|}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\,dx \leq \left(\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}_{<+\infty}$$

$$\leq C\,\|u\|_{\alpha,\beta}$$

$\alpha \leq \frac{1}{2}$ のときは次の補題を用いる

Lem 1 $\alpha \leq \frac{1}{2}$ かつ $2\alpha+\beta > \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\exists\, C = C_{\alpha,\beta} > 0$ s.t.
$\forall \delta \in (0,1)$ s.t. $B_\delta \subset\subset \Omega$ と $\forall u \in \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ に対して

$$\int_{B_\delta} \frac{|u(x)|}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\,dx \leq C_{\alpha,\beta}\,\|u\|_{\alpha,\beta}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{3}{2}-2\alpha-\beta}$$

∵ (Lem)

$\alpha \leq 1/2$ より $\dfrac{1}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^{2\alpha}} \notin L^1(\Omega)$

$u \in \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ $\|u\|_{\alpha,\beta} < \infty$ となるには $\underline{u(0)=0}$ が必要

このとき 極座標を用いて $x = r\omega$ $\omega \in S^1$ $r = |x|$

$$|u(x)| = |u(r\omega)| \underset{u(0)=0}{=} \left| \int_0^r \underset{\frac{\partial u}{\partial r}(t\omega)\cdot\omega}{\frac{\partial}{\partial t}(u(t\omega))} dt \right| \leq \left| \int_0^r \left| \frac{\partial u}{\partial r}(t\omega) \right| dt \right|$$

$$\leq \left(\int_0^r \left| \frac{\partial u}{\partial r}(t\omega) \right|^2 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{2\beta} t\, dt \right)^{1/2} \boxed{\left(\int_0^r \frac{dt}{t (\log \frac{1}{t})^{2\beta}} \right)^{1/2}}$$

$\beta > 1/2$ のとき有限 $\left\{ \dfrac{1}{2\beta - 1} \left(\log \frac{1}{r}\right)^{1-2\beta} \right\}^{1/2}$

$$\leq C \|u\|_{\alpha,\beta} \left(\log \frac{1}{r}\right)^{\frac{1-2\beta}{2}}$$

($\beta > 1/2$ のとき)

$$\therefore \int_0^\delta \frac{|u(r\omega)|}{r (\log \frac{1}{r})^{2\alpha}} dr \leq C \|u\|_{\alpha,\beta} \underline{\int_0^\delta \frac{(\log \frac{1}{r})^{\frac{1-2\beta}{2}}}{r (\log \frac{1}{r})^{2\alpha}} dr}$$

$2\alpha + \beta - \frac{1}{2} > 1$ のとき有限値

$\dfrac{1}{2\alpha + \beta - \frac{3}{2}} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-(2\alpha + \beta - \frac{3}{2})}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq 1/2 \\ 2\alpha + \beta > 3/2 \end{array} \right. \Rightarrow \beta > 1/2 \text{ に注意}$$

この両辺を $\displaystyle\int_{S^1} (\cdots)\, dS_\omega$ して

$$|T_0(u)| \leq \int_{B_\delta} \frac{|u(x)|}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^{2\alpha}} dx \leq C \|u\|_{\alpha,\beta} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-(2\alpha + \beta - \frac{3}{2})}$$

//

Prop 1 の証明 続き　　　$\alpha \le 1/2$ かつ $2\alpha+\beta > 3/2$ のとき

$$\int_\Omega \frac{|u|}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}\,dx = \underbrace{\int_{B_\delta}}_{\text{Lem 1で評価}} + \underbrace{\int_{\Omega\setminus B_\delta}}_{\text{ここでは } \frac{1}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} \in L^1(\Omega\setminus B_\delta)}$$

$\therefore\ \exists C>0 \quad |T_0(u)| \le C\|u\|_{\alpha,\beta}$ //

◎ Thm 3 ($N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の達成可能性) の証明のスケッチ

仮定　$\alpha+\beta>1 \Rightarrow$ 最小化列の原点への集中を排除できる

($\{u_n\} \to \{(u_n)_\lambda\}$ を考えて $\lambda \sim 0$ に取る)

$2\alpha+\beta > 3/2 \Rightarrow$ 制約集合 $\{u \in H^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega) : T_0(u)=0\}$ は weakly closed

$\therefore$ $N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は達成される

◎ Thm 4 ($N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ の達成不可能性) の証明のスケッチ

補助線となる問題

$$\overline{N}_{\alpha,\beta}(\Omega) := \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\beta}dx : u \in H^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega),\ \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}dx = 1\right\}$$

$\overline{N}_{\alpha,\beta}(\Omega) \le N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は自明 (制約集合の大小)

① $\overline{N}_{\alpha,\beta}(\Omega) = N_{\alpha,\beta}(\Omega) \Rightarrow N_{\alpha,\beta}(\Omega)$ は達成されない

② $\begin{cases} \alpha+\beta \ge 1 \\ 2\alpha+\beta \le 3/2 \end{cases} \Rightarrow N_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{N}_{\alpha,\beta}(\Omega)$　　の2段階で示す

◎ Thm 5 の証明の一部

$\alpha \geq 1/2 \qquad N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) < H_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) \quad \left(= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right)$

$\Longrightarrow \qquad N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)$ は達成される

Prop 2 (L^2 項付き 臨界 Hardy 不等式 for $\mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)$)

$\alpha \neq 1/2$ 　このとき $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta \in (0,1)$ s.t. $B_\delta \subset\subset \Omega$

に対し $\exists C(\varepsilon, \delta) > 0$ s.t.

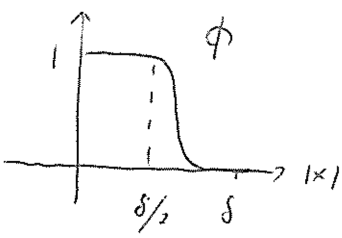
$$\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx \leq \left(\frac{1}{H_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)} + \varepsilon\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)} dx$$

$$+ \ C \int_{\Omega \setminus B_{\delta/2}} |u|^2 dx \qquad \left({}^\forall u \in \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega)\right)$$

が成立つ

$$\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx \geq \inf_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}\right) \int_\Omega |u|^2 dx \quad \text{より}$$

$\mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ に注意



$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} \phi \subset B_\delta$, $\phi \equiv 1$ on $B_{\delta/2}$

$0 \leq \phi \leq 1$

$$\int_\Omega |\nabla(\phi u)|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)} dx \qquad \max_{x \in \Omega} \left\{ |x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^2 \right\}$$

$$\leq 2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)} dx + 2 \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2 \int_{B_\delta \setminus B_{\delta/2}} \frac{|u|^2}{|x|^2 \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} dx < \infty$$

$\phi u \in \mathcal{H}^{1,2}_{0,\alpha,\beta}(\Omega)$ に臨界 Hardy 不等式を適用

$$\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}dx = \underbrace{\int_\Omega \frac{|\phi u|^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}}_{\text{臨界 Hardy 適用}} + \int_\Omega \frac{(1-\phi^2)|u|^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}$$

$$\leq \frac{1}{H_{\alpha,1-\alpha}} \int_\Omega \underbrace{|\nabla(\phi u)|^2}_{\text{Young}}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)}dx + \int_\Omega \frac{(1-\phi^2)|u|^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}}dx$$

$$\leq (1+H\varepsilon)|\nabla u|^2\underbrace{\phi^2}_{\leq 1} + \left(1+\frac{1}{H\varepsilon}\right)|\nabla\phi|^2u^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{H}+\varepsilon\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)}dx$$

$$+ \left(\int_\Omega |u|^2 \underbrace{\left(\frac{(1-\phi^2)}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} + \left(\frac{1}{H}+\frac{1}{H^2\varepsilon}\right)|\nabla\phi|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)}\right)}_{=\Phi(x)}\right)dx$$

$\Phi \equiv 0$ on $B_{\delta/2}$ に注意

$$\therefore \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}} \leq \left(\frac{1}{H}+\varepsilon\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)}dx$$

$$+ \left(\max_{x\in\Omega\setminus B_{\delta/2}} \Phi(x)\right)\int_{\Omega\setminus B_{\delta/2}} |u|^2dx$$

// (Prop 2)

◎ $\begin{cases} \alpha \geq 1/2 \\ N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) < H_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) = (\alpha - 1/2)^2 \end{cases} \Rightarrow N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)$ は達成される

の証明

∵

$\{u_n\} \subset \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)$: $N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega)$-最小化列 s.t

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} = 1, \quad \int_\Omega \frac{u_n}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 (\log\frac{1}{|x|})^{2\beta} dx = N_{\alpha,1-\alpha}(\Omega) + o(1) \end{cases}$$

∴ ∃部分列, $^\exists u \in \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,1-\alpha}$ s.t $u_n \longrightarrow u$ weakly in $\mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,1-\alpha}$

$u_n \longrightarrow u$ strong in

$L^2(\Omega\setminus B_\delta)$, $L^2(\Omega\setminus B_\delta, \frac{1}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}})$

仮定 $\begin{cases} \alpha \geq 1/2 \\ N_{\alpha,1-\alpha} < (\alpha - 1/2)^2 \end{cases} \Rightarrow \alpha > 1/2$

このとき $\dfrac{1}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} \in L^1(\Omega)$ ∴ $T_0 : \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,1-\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}$

$u \longmapsto T_0(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{u}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}$

は連続線形汎関数

weak limit は

これから $T_0(u) = \lim_{n\to\infty} T_0(u_n) = 0$ ∴ $T_0(u) = 0$ をみたす

(目標)

$$\boxed{\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} dx = 1}$$

E: OK ⇒ u が $N_{\alpha,\beta}(\Omega)$-最小化元

($L^2(\Omega, \frac{1}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}})$ ノルムのwlsc から $\displaystyle\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} dx \leq 1$ はok)

① <u>weak limit $u \not\equiv 0$ を示すこと.</u>

背理法 $u \equiv 0$ とせよ. このとき $u_n \longrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{u}$ L^2強 in $L^2(\Omega \setminus B_{\delta/2})$

Prop 2 (L^2項付き臨界 Hardy) から

$$1 = \int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^2 (\log \frac{1}{|x|})^{2\alpha}} dx \le \left(\frac{1}{H_{\alpha,1-\alpha}} + \varepsilon \right) \underbrace{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 (\log \tfrac{1}{|x|})^{2\beta} dx}_{= N_{\alpha,1-\alpha} + o_n(1)}$$

$$+ C(\varepsilon, \delta) \underbrace{\int_{\Omega \setminus B_{\delta/2}} u_n^2 dx}_{= o_n(1)\ (u \equiv 0)}$$

weak limit

$\therefore$

$$1 \le \left(\frac{1}{H_{\alpha,1-\alpha}} + \varepsilon \right) \left(N_{\alpha,1-\alpha} + o_n(1) \right) + C(\varepsilon, \delta) \times o_n(1)$$

$n \to \infty$ として

$$1 \le \left(\frac{1}{H_{\alpha,1-\alpha}} + \varepsilon \right) N_{\alpha,1-\alpha}$$

次に $\varepsilon \to 0$ として $1 \le \dfrac{N_{\alpha,1-\alpha}}{H_{\alpha,1-\alpha}}$ これは仮定

$N_{\alpha,1-\alpha} < H_{\alpha,1-\alpha}$ に矛盾

$\therefore$ 弱極限 $u \not\equiv 0$ //

② $\displaystyle\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}dx < 1 \Rightarrow$ 矛盾 となること

∵

$$0 < 1 - \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}dx = \int_\Omega \frac{\overbrace{u_n^2 - u^2}^{=|u_n-u|^2 + 2u(u_n-u)}}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}dx$$

$$= \underbrace{\int_\Omega \frac{|u_n-u|^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}dx}_{\text{Prop 2 (L^2項付き臨界Hardy)適用}} + o_n(1) \quad \left(u_n \rightharpoonup u \text{ weakly in } L^2(\Omega, \frac{1}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}) \right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{H_{\alpha,1-\alpha}} + \varepsilon\right)\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)}dx + C(\varepsilon,\delta)\underbrace{\int_{\Omega\setminus B_{\delta/2}}|u_n-u|^2dx}_{= o_n(1)} + o_n(1)$$

$$= \left(\frac{1}{H} + \varepsilon\right)\left(\underbrace{\int_\Omega |\nabla u_n|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)}dx}_{= N_{\alpha,1-\alpha} + o_n(1)} - \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)}dx}_{(*)} + o_n(1)\right)$$

$$\overset{(*)}{\leq} \left(\frac{1}{H} + \varepsilon\right)\left(N - N\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2(1-\alpha)}} + o_n(1)\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} (*)\ u \in \mathcal{H}^{1,2}_{\alpha,1-\alpha}(\Omega),\ T_0(u) = 0 \text{ から} \\ \displaystyle N_{\alpha,1-\alpha}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)} \end{array} \right)$$

∴ $n\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ として 両辺を $\left(1 - \displaystyle\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}}\right) > 0$ で割ると

$$1 \leq \frac{N_{\alpha,1-\alpha}}{H_{\alpha,1-\alpha}} \quad \text{これは矛盾}$$

//

◎ Thm 6 の証明

$R \in (0,1)$ given $\quad \Omega = B_R$

$N_{\alpha,1-\alpha}(B_R) < H_{\alpha,1-\alpha}(B_R) = (\alpha - \frac{1}{2})^2$ ならば Thm 5 より

$N_{\alpha,1-\alpha}(B_R)$ は達成される

$$\varphi(x) = \frac{x_1}{|x|} = \cos\theta \qquad x = (x_1, x_2) = |x| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

で $N_{\alpha,1-\alpha}(B_R)$ を test

・ $T_0(\varphi) = \displaystyle\int_{B_R} \frac{\varphi(x)}{|x|^2 (\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} dx = 0$ は自明

$(\alpha > \frac{1}{2}$ のとき$)$

・ $$\int_{B_R} \frac{\varphi^2(x)}{|x|^2(\log\frac{1}{|x|})^{2\alpha}} dx = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta\right)}_{= \pi} \int_0^R \frac{dr}{r(\log\frac{1}{r})^{2\alpha}} = \frac{\pi}{2\alpha-1} \left(\log\frac{1}{R}\right)^{1-2\alpha}$$

$(\alpha > \frac{3}{2}$ のとき$)$

・ $$\int_{B_R} |\nabla\varphi|^2 \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{2(1-\alpha)} dx = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\sin^2\theta}{r^2} \left(\log\frac{1}{r}\right)^{2(1-\alpha)} r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2\alpha-3} \left(\log\frac{1}{R}\right)^{3-2\alpha}$$

$$\therefore \quad N_{\alpha,1-\alpha}(B_R) \le Q(\varphi, B_R) = \frac{\left(\frac{\pi}{2\alpha-3}\right)\left(\log\frac{1}{R}\right)^{3-2\alpha}}{\left(\frac{\pi}{2\alpha-1}\right)\left(\log\frac{1}{R}\right)^{1-2\alpha}}$$

$$= \left(\frac{2\alpha-1}{2\alpha-3}\right)\left(\log\frac{1}{R}\right)^2 \quad \left(< \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ ならOK} \right)$$

かつ $\alpha > \frac{3}{2}$

α の2次不等式

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha > 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\log\frac{1}{R}\right)^2}$$

//