A　電磁波

A.1　Maxwell 方程式

真空中の電磁波は，電荷密度 $\rho = 0$，電流密度 $\boldsymbol{j} = 0$ とおいた，次のような Maxwell 方程式で記述される．

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{A.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{A.2}$$

電荷のない真空中でも，これらの方程式の解はある．このことは，電荷がなくても電磁場は存在できることを意味する．このような電磁場のことを**電磁波**とよぶ．上記の Maxwell 方程式で，$\partial \boldsymbol{H}/\partial t$ や $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ が 0 であったら，$\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{H} = 0$ となり，電磁波は存在できない．すなわち，電荷のない真空中で電磁波が存在するということは，必然的に，それは時間変化するものでなければならないことを意味する．

A.2　ベクトルポテンシャル

$\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H}$ は，力学では「力」に相当するような物理量であり，力がポテンシャルから求められるように，電磁場の $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H}$ についてもポテンシャルを定義することができる[*136]．それは，

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} \tag{A.3}$$

となるようなベクトル $\boldsymbol{A}$ のことである．このように定義すると，ベクトルの公式より，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

は自動的に満たされる．(A.3) を (A.1) に代入すると，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial (\nabla \times \boldsymbol{A})}{\partial t} = -\frac{1}{c}\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

となり，$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{E}$ を求める式

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{A.4}$$

が得られる．これと (A.3) を (A.2) に代入すると，

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$

となる．ここで，(A.2) の第 2 式 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ が満たされるためには，(A.4) より，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{A.5}$$

でなければならないので，結局，

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \tag{A.6}$$

という方程式が得られる．この解がわかれば，(A.3) と (A.4) から $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ を得ることができ，それらは Maxwell 方程式 (A.1)(A.2) を満たしていることになる．

[*136] 電荷がある場合は $\boldsymbol{E}$ に対するポテンシャル $\phi = q/r$ があって，$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ から $\boldsymbol{E}$ がでてくるが，いま電荷はないので $\phi = 0$ であり，そのような意味でのポテンシャルはない．

A.3　Maxwell 方程式の解 — 電磁波 —

(A.6) は，速度 c で伝わる波動を表す微分方程式であり，

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{A}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{A.7}$$

の形の解をもつ．この波が**電磁波**である．この解は波長 $2\pi/k$，波数 k の電磁波を表しており，$\boldsymbol{A}_0$ は振幅を表す複素ベクトルである*137)．

(A.7) を (A.6) に代入すると，

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$$

となるから，

$$\omega=ck \tag{A.8}$$

である．また，(A.5) に代入すると，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=i(\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}=0$$

なので，

$$\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{A.9}$$

でなければならない．つまり，$\boldsymbol{A}_0$ は $\boldsymbol{k}$（波の進行方向）に垂直であり，$\boldsymbol{A}$ の波は横波であることになる．そこで，$\boldsymbol{k}$ と垂直な平面内で，直交する 2 つの方向を $\eta=\sigma,\pi$ で表し，これらの方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma$, $\boldsymbol{\varepsilon}_\pi$ と書くことにすると，

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_\eta \boldsymbol{\varepsilon}_\eta A_{0\eta}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\equiv\sum_\eta \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t) \tag{A.10}$$

となる．$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}1}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}2}$ のことを**基底偏光ベクトル**とよぶ*138)．ただし，振幅を表すスカラー量 $A_{0\eta}$ は複素数である*139)．

A.4　周期境界条件の導入による振幅の規格化

後の計算の便宜のため，周期境界条件を導入し，振幅を規格化する．空間を $0\le x\le L$, $0\le y\le L$, $0\le z\le L$ の立方体の集まりだと考え，電磁波はこの立方体を周期として周期的になっているとする．L が電磁波の波長より十分に長ければ，このような操作をしても問題はない．そうすると，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ として許される値は離散的になり，

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z)$$

となる．ただし，n_x, n_y, n_z は 0, ±1, ±2, $\cdots$ の整数である．

(A.10) の $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)$ は，$V=L^3$ の立方体内で次のような条件を満たす．

$$\int_V \boldsymbol{A}^*_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{\varepsilon}_\eta\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\eta)A^*_{0\eta}A_{0\eta}\int_V e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}=|A_{0\eta}|^2V$$

そこで，$A_{0\eta}=\sqrt{4\pi c^2/V}$ としておけば，

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\boldsymbol{\varepsilon}_\eta e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{A.11}$$

は，体積 V の空間で $4\pi c^2$ に規格化された電磁波のベクトルポテンシャルを表す*140)．

*137) なぜ複素数なのかを今ここで気にする必要はない．位相についての計算が楽になるからであり，最終的な物理量は実数になるように工夫する．

*138) 電磁波を 2 つの偏光成分の足し合わせとして表現したわけである．

*139) 複素数であることは，$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma$ の波と $\boldsymbol{\varepsilon}_\pi$ の波の位相を表すことに相当している．たとえば，B, C を実数として，$A_{0\sigma}=Be^{i\phi}$，$A_{0\pi}=Ce^{i(\phi-\pi/2)}$ だとすると，$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma$ の波の位相は $\boldsymbol{\varepsilon}_\pi$ の波の位相より $\pi/2$ だけ進んでいることになる．$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ の実部を実際に意味のある物理量だと考えると，一周期の時間を T としたとき，$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma$ の波の大きさが $+B$ になってから $T/4$ だけ後に $\boldsymbol{\varepsilon}_\pi$ の波の大きさが $+C$ になる．

*140) なぜ $4\pi c^2$ なのかは，後のほうでシンプルに式変形を行い，単位のつじつまを合わせるためである．べつにここで $4\pi c^2$ をつけなくてもよいが，そうすると別のどこかの係数に $4\pi c^2$ をつけなければならなくなる．

A.5 電場と磁場

一般の偏光状態は σ と π の重ね合わせであり，また，最終的な物理量は実数でなければならないから，複素共役を足し合わせる形にして，

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\eta}(q_{\eta}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)+q_{\eta}^{*}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}(\boldsymbol{r},t)) \tag{A.12}$$

と書く．$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)$ は規格化された (A.11) を使う．これを (A.3) と (A.4) に代入すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{i}{c}\sum_{\eta}\omega\{q_{\eta}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)-q_{\eta}^{*}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}(\boldsymbol{r},t)\}\\&=i\sum_{\eta}k\{q_{\eta}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)-q_{\eta}^{*}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}(\boldsymbol{r},t)\}\equiv\sum_{\eta}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t) \qquad \text{(A.13)}\\\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t)&=i\sum_{\eta}\boldsymbol{k}\times\{q_{\eta}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)-q_{\eta}^{*}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}(\boldsymbol{r},t)\}\\&=\sum_{\eta}\frac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t) \qquad \text{(A.14)}\end{aligned}$$

が得られる．複素共役を引いて i をかけてあるので，これらも実数になる．(A.14) より，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ の大きさは等しく[*141]，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は互いに直交していて，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ が $\boldsymbol{k}$ の向きを向くことが読み取れる[*142]．実際に q_{η} に数値を代入して，具体的な電磁波を記述してみるのは，§5 で行っている．

以上は単一の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ だけについて記述してきたが，一般の電磁波は多くの波の重ね合わせであるから，$\boldsymbol{k}$ についての和も入れて，次のように表すのがよい．

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\boldsymbol{k},\eta}(q_{\boldsymbol{k}\eta}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)+q_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}(\boldsymbol{r},t)) \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{i}{c}\sum_{\boldsymbol{k},\eta}\omega_{k}\{q_{\boldsymbol{k}\eta}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)-q_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}(\boldsymbol{r},t)\}\\&=i\sum_{\boldsymbol{k},\eta}k\{q_{\boldsymbol{k}\eta}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)-q_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}(\boldsymbol{r},t)\}\equiv\sum_{\boldsymbol{k},\eta}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t) \qquad \text{(A.16)}\\\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=i\sum_{\boldsymbol{k},\eta}\boldsymbol{k}\times\{q_{\boldsymbol{k}\eta}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t)-q_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\eta}^{*}(\boldsymbol{r},t)\}\\&=\sum_{\boldsymbol{k},\eta}\frac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\eta}(\boldsymbol{r},t) \qquad \text{(A.17)}\end{aligned}$$

[*141] cgs-Gauss 単位系で記述しているので，このようにシンプルでわかりやすい結果になる．これを SI 単位系でやろうとすると，ε_0 や μ_0 が入ってきて，大きさの関係や単位の意味が複雑になりすぎ，理解はほとんど不可能になる．SI 単位系は抵抗，コンデンサー，コイルを組み合わせた電気回路を考えるときなどにはなじみやすいが，物理を考えるのに適しているとは思えない．

[*142] ポインティングベクトルは $\boldsymbol{P}=c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}/4\pi$ で定義される．