ベルヌーイ試行の条件 (2) は

A_i を i 回目の試行で事象 A が起こる. $(i = 1, 2, \ldots, n)$

と定義すると

$A_1, \ldots, A_n$ が独立

ということを表しています. 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が互いに独立であることを示すには,

$$\text{任意の区間 } J_1, \ldots, J_n\text{に対して } \mathrm{P}(X_1 \in J_1, \ldots, X_n \in J_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j \in J_j) \tag{1}$$

を示せばよいのですが, $J_1, \ldots, J_n$ のうち, ひとつでも $0, 1$ の両方を含まない区間があれば両辺ともに値 0 となるので, 各区間は 0 または 1 を含む場合を考えれば十分です. また, 例えば, J_n が $0, 1$ の両方を含むときには

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_1 \in J_1, \ldots, X_n \in J_n) &= \mathrm{P}(X_1 \in J_1, \ldots, X_n \in J_{n-1}), \\
\mathrm{P}(X_n \in J_n) = 1 \text{ より右辺 } &= \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{P}(X_j \in J_j)
\end{aligned}$$

なので $J_1, \ldots, J_n$ のうち 0 または 1 のどちらか一つだけを含む区間を $J_{i_1}, \ldots, J_{i_k}$ $(1 \leq i_1, \ldots, k_k \leq n, 1 \leq k \leq n)$ とするとき

$$\mathrm{P}(X_{i_1} \in J_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \in J_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}(X_{i_j} \in J_{i_j}) \tag{2}$$

を示せばよいことになります. J_{i_j} が 1 のみを含むとき, $X_{i_j} \in J_{i_j}$ は A_{i_j} と同じ事象を表し, J_{i_j} が 0 のみを含むとき, $X_{i_j} \in J_{i_j}$ は $A_{i_j}^c$ と同じ事象を表すので, $A_1, \ldots, A_n$ が独立であることから, (2) が成り立つことが言え, したがって $X_1, \ldots, X_n$ は独立であることが示されます.