2009 年度 確率・統計A 中間試験問題

平成 21 年 6 月 2 日

問題 1. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ が確率空間であることの定義を書け.

問題 2. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とする. 確率空間の定義のみを用いて次の (1),(2),(3) を証明せよ.

(1) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}, A \cup B \in \mathcal{B}$.

(2) $A_i \in \mathcal{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$.

(3) $A_i \in \mathcal{B}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ならば $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$.

問題 3. ある民宿には３つの部屋があり, 最初の部屋には男性３人, 次の部屋には女性２人, ３つめの部屋には男女一人ずつが宿泊している. ランダムに (同じ確率で) 部屋を選んでノックしたところ, 女性の返事があった. どの部屋でも, どの人がノックに返事をするかは同じ確率であると仮定して, ノックした部屋には女性２人が宿泊している確率を求めよ.

問題 4. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A, B, C \in \mathcal{B}$ とする.

(1) A, B, C が独立であることの定義を書け.

(2) A, B, C は独立であり, $\mathrm{P}(A) \neq 0$ とする. このとき 事象 $A \cup B$ が与えられたときの 事象 C の起こる条件付き確率は $\mathrm{P}(C)$ に等しいことを示せ.

問題 5. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \Omega\}$ とすると $(\Omega, \mathcal{B})$ は可測空間となる. このとき, 次の (1),(2) で定義された Ω 上の実数値関数が, それぞれ $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率変数であるかどうか, 理由とともに答えよ.

(1) $X(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \text{ が奇数のとき }) \\ 0 & (\omega \text{ が偶数のとき }) \end{cases}$

(2) $X(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \text{ が } 2 \text{ 以下のとき }) \\ 0 & (\omega \text{ が } 3 \text{ 以上のとき }) \end{cases}$