2009年度 確率・統計A 期末試験問題

平成21年8月4日

問題 1. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A, B, C \in \mathcal{B}$ とする.

(1) A, B, C が独立であることの定義を書け.

(2) A, B, C は独立であり, $\mathrm{P}(A) \neq 0$ とする. このとき 事象 $A \cap B^c$ が与えられたときの 事象 C の起こる条件付き確率は $\mathrm{P}(C)$ に等しいことを示せ.

問題 2. X, Y, Z を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする.

(1) X, Y, Z が独立であることの定義を書け.

(2) (X, Y, Z) の同時分布関数を $F(x, y, z)$ と表し, X, Y, Z の周辺分布関数を $F_X(x), F_Y(y), F_Z(z)$ と表す. X, Y, Z が独立ならば, 任意の実数 x, y, z に対して

$$F(x, y, z) = F_X(x) F_Y(y) F_Z(z)$$

が成り立つことを証明せよ.

問題 3. (X, Y) は連続型確率ベクトルで, その確率密度関数が次で与えられるものとする.

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

(1) X, Y は独立であることを示せ.

(2) $X = R\cos T, Y = R\sin T$ $(R \geq 0, \leq T < 2\pi)$ によって R, T を定義する. (R, T) の同時確率密度関数を求めよ.

(3) R, T は独立であることを示せ.

(4) T の分布関数を求め, そのグラフを描け.

(5) $Z = X^2 + Y^2$ の期待値を求めよ.

問題 4. X を連続型確率変数で, その確率密度関数を $f(x)$ と表す.

(1) X の分散 $\mathrm{Var}(X)$ の定義を書け.

(2) a, b を定数, $Y = aX + yb$ とするとき $\mathrm{Var}(Y) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ であることを定義のみを用いて証明せよ.