

確率統計 A

第 1 章 事象と確率 (Part 2)

(2012 年 4 月 17 日)

講師: 若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstat12>

確率統計 A, 2012年4月17日: P.1

σ-集合体

定義 1.1. 標本空間 Ω の部分集合の集まり \mathcal{B} で次の (B1), (B2), (B3) を満たすものを Ω 上の **σ-集合体 (σ-field)** または **σ-加法族** という。

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

(B3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$

確率統計 A, 2012年4月17日: P.2

定理 1.1

定理 1.1. \mathcal{B} を Ω 上の σ-集合体とする. このとき

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$,

(2) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}$,

(3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$,

(4) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{B}, \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} \in \mathcal{B}$.

確率統計 A, 2012年4月17日: P.3

1.4. 確率

確率統計 A, 2012年4月17日: P.4

古典的確率

標本空間 Ω が有限個の点からなる集合で, 起こりうる結果がすべて同程度に確からしいと考えられるとき, Ω の部分集合の全体を $\wp(\Omega)$ とし, $\wp(\Omega)$ の各要素 A についてその確率を

$$P(A) = \frac{A \text{ の要素の数}}{\Omega \text{ の要素の数}}$$

として定める. 以下集合 A の要素の数を $\#(A)$ で表す.

⇒ Ω が **非可算集合** のとき, Ω のすべての部分集合に対して確率を定義することは困難になる.

⇒ 確率の定義を変更.

確率統計 A, 2012年4月17日: P.5

確率の公理

古典的確率 $P(A)$ は常に以下の性質を満たしている.

(P1) 任意の $A \in \wp(\Omega)$ に対して $0 \leq P(A) \leq 1$.

(P2) $P(\Omega) = 1$.

(P3') (有限加法性) $A_i \in \wp(\Omega), i=1, \dots, n,$
 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

確率統計 A, 2012年4月17日: P.6

確率測度

定義 1.2. \mathcal{B} を標本空間 Ω 上の σ -集合体とする ((\mathcal{B}, Ω) を **可測空間 (Measurable Space)** という). \mathcal{B} 上で定義された集合関数 P で以下の条件 (P1), (P2), (P3) を満たすものを (Ω, \mathcal{B}) 上の **確率測度 (Probability Measure)**, または単に **確率 (Probability)** と呼ぶ.

(P1) 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $0 \leq P(A) \leq 1$.

(P2) $P(\Omega) = 1$.

(P3) (**完全加法性**または**可算加法性**) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ で, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

確率統計 A, 2012年4月17日: P.7

注意

- 注 1.4. 条件 (P3) (完全加法性) よりも弱い条件 (P3') (有限加法性) を満たすとき, P を **有限加法的確率 (Finite Additive Probability)** と呼ぶ.
- 定義 1.2 を満たす3つの組 (Ω, \mathcal{B}, P) を **確率空間 (Probability Space)** という.
- 事象 (Event): Ω の部分集合 $\rightarrow \Omega$ の部分集合の集まりである Ω 上の σ -集合体の要素 (事象は Ω 上の σ -集合体 \mathcal{B} に依存).

確率統計 A, 2012年4月17日: P.8

定理 1.2

定理 1.2. P を (Ω, \mathcal{B}) 上の確率とする. このとき以下が成り立つ.

(1) $P(\emptyset) = 0$,

(2) $A \in \mathcal{B}$ に対し $P(A^c) = 1 - P(A)$,

(3) (単調性) $A, B \in \mathcal{B}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,

(4) (加法公式) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

(5) (有限加法性) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}, A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$)

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

(6) (有限劣加法性) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

確率統計 A, 2012年4月17日: P.9

定理 1.2 の証明

確率統計 A, 2012年4月17日: P.10

定理 1.3

定理 1.3. P を (Ω, \mathcal{B}) 上の確率とし $\{A_n\}$ を \mathcal{B} に属する事象列とする. このとき以下が成り立つ.

(1) (劣加法性) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$,

(2) $\{A_n\}$ が単調増加列のとき, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$,

(3) $\{A_n\}$ が単調減少列のとき, $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$,

(4) (連続性) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ のとき,

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

確率統計 A, 2012年4月17日: P.11

定理 1.3 の証明

確率統計 A, 2012年4月17日: P.12

定理 1.4

定理 1.4. (ボレル・カンテリの定理) (Ω, \mathcal{B}, P) を確率空間,

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ とする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}) = 0.$$

確率統計 A, 2012年4月17日: P.13

定理 1.4 の証明

確率統計 A, 2012年4月17日: P.14