確率統計 A

第 1 章 事象と確率 (Part 1)

(2012 年 4 月 10 日)

講師:若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12

講義の予定

- **第1 週:** 4 月 10 日「1.1 不確実性へのアプローチ」「1.2 古典的確率」「1.3 事象族」
- **第2 週:** 4 月 17 日「1.4 確率」
- **第3 週:** 4 月 24 日「1.5 確率空間の構成」「1.6 条件付き確率」
- **第4 週:** 5 月 1 日「1.7 事象の独立」
- **第5 週:** 5 月 8 日「2.1 確率変数の定義」「2.2 分布関数」
- **第6 週:** 5 月 15 日「2.3 多次元確率ベクトルと分布」「2.4 確率変数の独立性」
- **第7 週:** 5 月 22 日「2.5 離散型・連続型分布 2.5.1 1次元の場合」
- **第8 週:** 5 月 29日「2.5.2 2次元の場合」「2.5.3 多次元の場合」
- **第9 週:** 6 月 5 日「3.1 平均の定義」「3.2 基本的性質」
- **第10週:** 6 月 12 日「3.3 特性量」
- **第11週:** 6 月 19 日「中間試験」
- **第12週:** 6 月 26 日「3.4 条件付き分布と平均」
- **第13週:** 7月　3日 (休講)
- **第14週:** 7 月 10日「4.1 特性関数とモーメント」
- **第15週:** 7 月 24 日「4.2 分布と特性関数」
- **第16週:** 7 月 31 日「期末試験」

注意

- 授業の進度により, 内容が変更されることがある.
- 質問等があれば C810に直接来るか, wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp にメイルすること. 質問に来る場合は, メイルまたは電話 (082-424-7359) であらかじめ連絡をとってもらえると確実.
- 配布した資料は http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12 にアップするので, 受け取っていないものはダウンロードしておくこと.
- 成績は, 中間&期末テスト, 出席状況を総合して評価する.

1.1. 不確実性へのアプローチ

不確実性

我々はあらゆる場面で不確実性に直面している.

1. ある時刻からある時刻までに 1mm 以上の雨が降るか.
2. ある銘柄の 1 週間後の株価はどのようになるか。
3. ある病気にはどんな遺伝子が関係しているか.
4. 新たに開発された新薬はこれまでのものに較べて効果があるか.
5. ある作者不詳の作品について，作者を知りたい.
6. ある工場で作製されている製品の不良率はどの程度か.

不確実性の原因

1. 情報の欠如のため.
2. 入手可能な情報の不正確さのため.
3. 必要とする情報を取り出す方法がないため.
4. 必要な測定を行うことができないため.
5. **不確実性が本質的に備わっている**ため.

⇒ 不確実性を数量化する (統計学).
不確実性を確率によって表現する.

1.2. 古典的確率

定義と表記

試行: 不確実性を伴う実験や調査.

標本点 (Sample Point): 試行によって起こりうる個々の結果.

標本空間 (**Sample Space**) Ω: 標本点全体からなる集合.

事象 (**Event**): Ω の部分集合.

事象 A が起こる: 試行の結果, 事象A に含まれる標本点のどれかが起こる

$A\cap B$:積事象, $A\cup B$:和事象, A^c:余事象, $\varnothing$:空事象.

Example 1.1

サイコロを1回振る試行において, 標本空間および「偶数の目が出る」という事象は,

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{2,4,6\}$

と表せる. この場合 Ω の部分集合は全部で 2^6 個ある.

Example 1.2

銅貨を n 回投げる試行において, 標本空間および「第 1 回目と第 2 回目に続けて表が出る」という事象は

$\Omega=\{(\omega_1,\ldots,\omega_n);\ \omega_i=0$ または $1,\ i=1,\ldots,n\}$

$A=\{(\omega_1,\ldots,\omega_n);\ (\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega,\omega_1=\ \omega_2\ =1\}$

で表せる. この場合, 標本点の個数は $N=2^n$ 個である. 従って, Ω の部分集合は全部で 2^N 個ある.

古典的確率

標本空間 Ω が有限個の点からなる集合で, 起こりうる結果がすべて同程度に確からしいと考えられるとき, Ω の部分集合の全体を$\wp(\Omega)$とし, $\wp(\Omega)$の各要素A についてその確率を

$$\mathrm{P}(A)=\frac{A\text{の要素の数}}{\Omega\text{の要素の数}}$$

として定める. 以下集合Aの要素の数を$\#(A)$で表す.

ex 1.3) Example 1.1 では $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}\#(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

ex 1.4) Example 1.2 では $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2^n}\#(A)=\frac{2^{n-2}}{2^n}=\frac{1}{4}$

確率の公理

古典的確率$\mathrm{P}(A)$は常に以下の性質を満たしている.

(P1) 任意の $A\in\wp(\Omega)$に対して $0\leq\mathrm{P}(A)\leq 1$.

(P2) $\mathrm{P}(\Omega)=1$.

(P3′) (有限加法性) $A_i\in\wp(\Omega),\ i=1,\ldots,n,$ $A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$ ならば

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$$

1.3. 事象族

σ-集合体

定義 1.1. 標本空間 Ω の部分集合の集まり $\mathcal{B}$ で次の (B1), (B2), (B3) を満たすものを Ω 上の **σ-集合体** (**σ-field**) または **σ-加法族**という.

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

(B3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$

σ-集合体の例

1. $N(\Omega) = \{\varnothing, \Omega\}$
2. $\sigma[A] = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$
3. $\wp(\Omega)$

集合体

注 1.1. 標本空間 Ω の部分集合の集まり $\mathcal{B}$ で次の (B1), (B2), (B3′) ((B3) の条件を緩めたもの) を満たすものを**集合体**という.

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

(B3′) $A_1, A_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}$

σ-集合体の性質

1. σ-集合体は集合体である.
2. 有限個の要素からなる集合体は σ-集合体である.
3. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ が Ω 上の σ-集合体ならば $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ も σ-集合体である.
4. $\{\mathcal{B}_j\}_{j \in J}$ を Ω 上の σ-集合体の集まりとする. このとき, $\cap_{j \in J} \mathcal{B}_j$ も σ-集合体である.
5. $\mathcal{A}$ を Ω 上の集合族とする. このとき $\mathcal{A}$ を含む最小な σ-集合体 $\sigma[\mathcal{A}]$ が存在する.

上極限集合と下極限集合 (1/2)

集合列 $\{A_n\}$ に対して, 集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ および $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_k$ をそれぞれ $\{A_n\}$ の上極限集合および下極限集合と呼び, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ と表す. 一般に $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$. 特に $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ のとき $\lim_{n\to\infty} A_n$ で表す.

上極限集合: 無限個の n について事象 A_n が起こること.

下極限集合: ある番号から先すべての n について 事象 A_n が起こること.

上極限集合と下極限集合 (2/2)

上極限集合: 無限個の n について事象 A_n が起こること.

下極限集合: ある番号から先すべての n について 事象 A_n が起こること.

$ex)$ 銅貨を無限回投げたとき n 回目に表が出る事象

$A_n = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) : (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega, \omega_n = 1\}$ を考える.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{k\text{回目に表が出る}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{n\text{回目以降に表が出る}\}$$
$$= \{1\text{が無限回出る}\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{k\text{回目に表が出る}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\text{回目以降表が出続ける}\}$$
$$= \{\text{ある回数以降表が出続ける}\}$$

定理 1.1

定理 1.1. $\mathcal{B}$ を Ω 上の σ−集合体とする. このとき

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$,

(2) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B},\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$,

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$,

(4) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{B},\ \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

定理 1.1 の証明