確率統計 A

第 1 章 事象と確率 (Part 2)

(2012 年 4 月 17 日)

講師:若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: http:home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstat12

σ-集合体

定義 1.1. 標本空間 Ω の部分集合の集まり $\mathcal{B}$ で次の (B1), (B2), (B3) を満たすものを Ω 上の **σ-集合体** (**σ-field**) または **σ-加法族**という.

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

(B3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$

定理 1.1

定理 1.1. $\mathcal{B}$ を Ω 上の σ−集合体とする. このとき

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$,

(2) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B},\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$,

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$,

(4) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{B},\ \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

1.4. 確率

古典的確率

標本空間 Ω が有限個の点からなる集合で，起こりうる結果がすべて同程度に確からしいと考えられるとき， Ω の部分集合の全体を $\wp(\Omega)$ とし， $\wp(\Omega)$ の各要素 A についてその確率を

$$\mathrm{P}(A) = \frac{A\text{の要素の数}}{\Omega\text{の要素の数}}$$

として定める．以下集合 A の要素の数を $\#(A)$ で表す．

⇨ Ω が**非可算集合**のとき，Ω のすべての部分集合に対して確率を定義することは困難になる．

⇨ 確率の定義を変更．

確率の公理

古典的確率 $\mathrm{P}(A)$ は常に以下の性質を満たしている．

(P1) 任意の $A\in\wp(\Omega)$ に対して $0\le\mathrm{P}(A)\le1$.

(P2) $\mathrm{P}(\Omega)=1$.

(P3′) (有限加法性) $A_i\in\wp(\Omega)$, $i=1,\dots,n$, $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ ならば

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)$$

確率測度

定義 1.2. $\mathcal{B}$ を標本空間 Ω 上の σ-集合体とする (($\mathcal{B}$, Ω) を**可測空間** (**Measurable Space**) という). $\mathcal{B}$ 上で定義された集合関数 P で以下の条件 (P1), (P2), (P3) を満たすものを $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の**確率測度** (**Probability Measure**), または単に**確率** (**Probability**) と呼ぶ.

(P1) 任意の $A\in\mathcal{B}$ に対して $0\le\mathrm{P}(A)\le1$.

(P2) $\mathrm{P}(\Omega)=1$.

(P3) (**完全加法性**または**可算加法性**) $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{B}$ で, $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ ならば

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_i)$$

注意

- 注 1.4. 条件 (P3) (完全加法性) よりも弱い条件 (P3´) (有限加法性) を満たすとき, P を**有限加法的確率** (**Finite Additive Probability**) と呼ぶ.
- 定義 1.2 を満たす3つの組 $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ を**確率空間** (**Probability Space**) という.
- 事象 (Event): Ω の部分集合 $\to$ Ω の部分集合の集まりである Ω 上の σ-集合体の要素 (事象は Ω 上の σ-集合体 $\mathcal{B}$ に依存).

定理 1.2

定理 1.2. Pを$(\Omega,\mathcal{B})$上の確率とする. このとき以下が成り立つ.

(1) $\mathrm{P}(\varnothing)=0$,

(2) $A\in\mathcal{B}$に対し$\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$,

(3)(単調性) $A,B\in\mathcal{B}, A\subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A)\le \mathrm{P}(B)$,

(4)(加法公式) $A,B\in\mathcal{B}\Rightarrow \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$,

(5) (有限加法性) $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{B},\ A_i\cap A_j=\varnothing\,(i\neq j)$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i),$$

(6)(有限劣加法性) $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{B}\Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\le\sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$.

定理 1.2 の証明

定理 1.3

定理 1.3. Pを$(\Omega,\mathcal{B})$上の確率とし$\{A_n\}$を$\mathcal{B}$に属する事象列とする. このとき以下が成り立つ.

(1)(劣加法性) $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\le\sum_{n=1}^\infty \mathrm{P}(A_n)$,

(2) $\{A_n\}$が単調増加列のとき, $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n)$,

(3) $\{A_n\}$が単調減少列のとき, $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n)$,

(4)(連続性) $\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n=\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n$のとき,

$$\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n).$$

定理 1.3 の証明

定理 1.4

定理 1.4.(ボレル・カンテリの定理) $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$を確率空間,

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$とする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

定理 1.4 の証明