

# 確率統計 A

## 第 1 章 事象と確率 (Part 3)

(2012 年 4 月 24 日)

講師: 若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12>

確率統計 A, 2012年4月24日: P.1

## 1.5. 確率空間の構成

確率統計 A, 2012年4月24日: P.2

### 標本点が有限個の場合

$\Omega$  が有限集合で,  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  とする. 標本点  $\omega_i$  の起こる確率が

$$P(\{\omega_i\}) = p_i, \quad i=1, \dots, n$$

であって,  $p_1 + \dots + p_n = 1$  とする. このとき, 事象  $A \subset \Omega$  の確率を

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i, \quad A \in \wp(\Omega)$$

として定める. このとき,  $P$  は  $\wp(\Omega)$  上の有限加法的確率である.  $\Omega$  が有限集合なので,  $P$  は確率の公理を満している.

確率統計 A, 2012年4月24日: P.3

### 標本空間が可算集合の場合

定理 1.5.  $\Omega$  が可算集合で,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  とし,  $\{p_1, p_2, \dots\}$  は

$$p_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

を満たすものとする. このとき, 標本点  $\omega_i$  の起こる確率を  $P(\{\omega_i\}) = p_i \quad (i=1, 2, \dots)$  とし, さらに

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i, \quad A \in \wp(\Omega)$$

と定義する. このように定義された  $P$  は  $\wp(\Omega)$  上の集合関数として, (P1), (P2), (P3') および完全加法的性 (P3) を満している.

確率統計 A, 2012年4月24日: P.4

### 注意

標本空間  $\Omega$  が実数全体, あるいは, 銅貨を無限回なげるような場合, **すべての集合に確率の公理を満たすように確率  $P$  を定義するのが困難.**

- ⇒ **基本的な事象の集まり  $M$  を定め, これらの事象を含む最小な  $\sigma$ -集合体を考える.**
- ⇒ **このような  $\sigma$ -集合体の存在は次の定理 1.6 で保証される.**

確率統計 A, 2012年4月24日: P.5

### 定理 1.6

定理 1.6.  $M$  を  $\Omega$  の任意の部分集合族とする. このとき  $M$  を含む最小な  $\sigma$ -集合体が一意的に存在する. これを  $\sigma[M]$  と書き,  $M$  から生成される  $\Omega$  上の  $\sigma$ -集合体という.

[証明]

$\mathcal{M} = \{\mathcal{B}\}$  を  $M$  を含む  $\sigma$ -集合体  $\mathcal{B}$  の全体とする.

$$\mathcal{B}_0 = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{M}} \mathcal{B}$$

と定義すると,  $M \subset \mathcal{B}_0$ ,  $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{M}$  は明らか.  $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{M}$  に対して  $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$  であるので,  $\mathcal{B}_0$  は  $M$  を含む最小の  $\sigma$ -集合体である.

確率統計 A, 2012年4月24日: P.6

### ボレル集合

$\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  で,

$$M = \mathcal{J}_1 = \{(a, b) : -\infty < a < b < \infty\}$$

のとき,  $\sigma[\mathcal{J}_1] = \mathbb{B}_1$  と書き, これを **1次元ボレル集合体** という. ボレル集合体に属する集合を **ボレル集合** という.

よく用いられる集合:  $(a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $\{a\}$ , 開集合, 閉集合, 等はすべてボレル集合. これらがボレル集合であることは, 例えば

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - n^{-1}], \quad [a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - n^{-1}, b]$$

と表すことによって示される.

確率統計 A, 2012年4月24日: P.7

### 確率と積分

$(\mathbb{R}, \mathbb{B}_1)$  上の確率  $P$  は, 多くの場合, 次の (1), (2) をみたす関数  $f(x)$  の積分として定義される.

1. すべての  $x$  に対して  $f(x) \geq 0$ ,
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

すなわち, 任意の  $a, b$  ( $a \leq b$ )  $\in \mathbb{R}$  に対して

$$P((a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

と定義する.

確率統計 A, 2012年4月24日: P.8

## 正規分布

例 1.11. (1次元正規分布 (ガウス測度)).  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  とするとき, 任意の  $a, b$  ( $a \leq b$ ) に対して

$$P((a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

となるような確率を, 平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の**正規分布 (ガウス測度)** という.

確率統計 A, 2012年4月24日: P.9

## $m$ 次元ボレル集合体:

$$J_m = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_m, b_m] : -\infty < a_i < b_i < \infty, k=1, \dots, m\}$$

とし,  $\sigma[J_m] = \mathbb{B}_m$  と書き, これを  **$m$ 次元ボレル集合体** という. 一般に, 二つの可測空間  $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$  が与えられたとき, 直積空間  $\Omega_1 \times \Omega_2$  の部分集合族  $\{A \times B : A \in \mathcal{B}_1, B \in \mathcal{B}_2\}$  から生成される  $\Omega_1 \times \Omega_2$  上の  $\sigma$ -集合体

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \equiv \sigma[\{A \times B : A \in \mathcal{B}_1, B \in \mathcal{B}_2\}]$$

を  $\mathcal{B}_1$  と  $\mathcal{B}_2$  の**直積  $\sigma$ -集合体**,  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$  を  $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$  と  $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$  の**直積可測空間** という. 同様に  $(\Omega_i, \mathcal{B}_i), i=1, \dots, m$  を可測空間とすると,  $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m$  上の  $\sigma$ -集合体

$$\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m \equiv \sigma[\{A_1 \times \cdots \times A_m : A_i \in \mathcal{B}_i, i=1, \dots, m\}]$$

を  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$  の**直積  $\sigma$ -集合体**,  $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m, \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m)$  を  $(\Omega_i, \mathcal{B}_i), i=1, \dots, m$  の**直積可測空間** という. このとき,  $m$ 次元ボレル集合体は 1次元ボレル集合体の直積  $\sigma$ -集合体, すなわち

$$\mathbb{B}_m = \mathbb{B}_1 \times \cdots \times \mathbb{B}_1$$

確率統計 A, 2012年4月24日: P.10

## 1.6. 条件付き確率

確率統計 A, 2012年4月24日: P.11

## 疑問

ある確率現象のモデル化として, 確率空間  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  が導入されているとする. この確率空間において, ある事象  $B$  が起きたという情報が与えられたとき, 可測空間  $(\Omega, \mathcal{B})$  に対してどのような確率測度を考えればよいであろうか?

確率統計 A, 2012年4月24日: P.12

### Example 1.12

(問) 1組52枚のカードから1枚のカードを抜き出す試行を考える。抜き出されたカードがスペードであるという情報が与えられたとき、どのような確率を考えればよいか。

(答) 標本空間は  $\Omega = \{s_1, \dots, s_{13}, t_1, \dots, t_{39}\}$  とし、抜き出されたカードがスペードであるという事象を  $B = \{s_1, \dots, s_{13}\}$  とする。このとき、各標本点の確率を  $P(\{s_i\}|B) = P_B(\{s_i\}) = 1/13$ ,  $P(\{t_j\}|B) = P_B(\{t_j\}) = 0$  とすればよい。

確率統計 A, 2012年4月24日: P.13

### 条件付き確率の定義

定義 1.3.  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  を確率空間,  $A, B \in \mathcal{B}$  とし,  $P(B) \neq 0$  とする。このとき

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

を事象  $B$  が与えられたときの事象  $A$  の**条件付き確率 (Conditional Probability)** という。

確率統計 A, 2012年4月24日: P.14

### 定理 1.7

定理 1.7.  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  を確率空間とし,  $B \in \mathcal{B}$  で  $P(B) \neq 0$  とする。  $B$  を固定し,  $A \in \mathcal{B}$  に対して

$$P_B(A) = P(A|B)$$

とおく。このとき  $P_B$  は  $(\Omega, \mathcal{B})$  上の確率である。

(ヒント)

$$0 \leq P_B(A) \leq 1, P_B(\Omega) = 1, P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i) \text{ (ただし } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ を示せばよい)}$$

確率統計 A, 2012年4月24日: P.15

### 乗法公式

定義 1.3 より,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

この結果は次の乗法公式に拡張される。

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ \times P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ \text{ただし, } P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0 \text{ とする。}$$

確率統計 A, 2012年4月24日: P.16

### Bayes の公式

定理1.8 (Bayes の公式). 事象列  $\{B_i\}$  は互いに素で,  $B_i \in \mathcal{B}$ ,  $P(B_i) > 0$ ,  $i=1,2,\dots$ , かつ

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$$

とする. このとき任意の  $A \in \mathcal{B}$ ,  $P(A) > 0$  に対して,

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B_j)P(A | B_j)}$$

確率統計 A, 2012年4月24日: P.17

### 定理1.8の証明

確率統計 A, 2012年4月24日: P.18

### Bayes の公式の解釈 (1/2)

試行の結果,  $B_1, B_2, \dots$  のいずれかが起こり, その影響で事象  $A$  が起こったとする.

- 事前: 事象  $A$  が起こる前のこと.
- 事後: 事象  $A$  が起こった後のこと.
- $P(B_i)$ : 事前確率(事象  $B_i$  に対して  $P(B_i)$  は事象  $A$  が起こる前に与えられている確率であるから).
- $P(B_i | A)$ : 事後確率(事象  $A$  が起こった後で与えられる確率であるから).

Bayesの公式は, 事後確率は事前確率を用いて表されることを示している.

確率統計 A, 2012年4月24日: P.19

### Bayes の公式の解釈 (2/2)

(別解釈) 2段階実験において, 第1段階実験により事象  $B_1, B_2, \dots$  のいずれかが起こり, 第2段階実験により事象  $A$  が起こるとする. このとき, 第2段階に事象  $A$  が起こったとき, 第1段階で事象  $B_i$  が起こっていたという条件確率  $P(B_i | A)$  を求める公式が Bayesの公式である.

確率統計 A, 2012年4月24日: P.20

### 注意 1.5

定理 1.8 において  $B_{n+1}=B_{n+2}=\dots=\emptyset$  とおくと、原因事象が有限個の Bayes の公式

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A | B_j)}$$

を得る。

確率統計 A, 2012年4月24日: P21

### Example 1.13

各々2つの引き出しがついた箱が3つある。箱1の引出しには両方とも金のコインが入っており、箱2には、一方の引き出しに金のコイン・他方の引き出しに銀のコインが入っており、箱3の引き出しには両方とも銀のコインが入っているものとする。箱をランダムに選び、引出しをあけたところ金のコインが入っていた。この箱の他方の引き出しに金のコインが入っている確率を求めよ。

確率統計 A, 2012年4月24日: P22

### Example 1.13 の解答

確率統計 A, 2012年4月24日: P23