確率統計 A

第1章 事象と確率 (Part 4) &
第2章 確率変数と分布 (Part 1)

(2012 年 5 月 1 日)

講師:若木宏文
E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
Web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/

1.7. 事象の独立性

事象の独立 (1/2)

2つの事象A, $B\in\mathcal{B}$について,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

が成り立つとき, AとBは**互いに独立である**という.

このとき, $0<\mathrm{P}(B)<1$ であると

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A|B^c)=\mathrm{P}(A)$ が成り立つ.

⇨ **A の条件付き確率は B の生起に無関係！**

同様に, $0<\mathrm{P}(A)<1$ であると

⇨ **B の条件付き確率は A の生起に無関係！**

条件付き確率の定義

定義 1.3. $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ を確率空間, A, $B\in\mathcal{B}$ とし, $\mathrm{P}(B)\neq 0$ とする. このとき

$$\boxed{\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}}$$

を事象 B が与えられたときの事象 A の**条件付き確率** (**Conditional Probability**) という.

事象の独立 (2/2)

A と B が独立 $\Leftrightarrow$ A と B^c が独立

$\Leftrightarrow$ A^c と B が独立

$\Leftrightarrow$ A^c と B^c が独立

が成り立つ.

(一般に, $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$ であることに注意)

Example 1.14 (3つの事象の独立)

コインを2回投げる試行について

標本空間: $\Omega=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}), (\mathrm{H},\mathrm{T}), (\mathrm{T},\mathrm{H}), (\mathrm{T},\mathrm{T})\}$.

A: 1回目に表がでる事象, B: 2回目に表がでる事象, C: 表と裏が1回づつでる事象 とする.

このとき,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(B\cap C)=1/4$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(C)=1/2$

であり, どの2つの事象も互いに独立であるが,3つの事象 A, B, C について

$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(\varnothing)=0\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=1/8$ となる.

3 個の事象の独立性

定義 1.4. 3 個の事象 A_1, A_2, A_3 が独立であるとは次の条件

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)$$
$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)$$
$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_3)$$
$$\mathrm{P}(A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)$$

が満たされるときをいう.

n 個の事象の独立性

定義 1.5. n 個の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が独立であるとは, これらの任意の有限個の $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n)$ に対して,

$$\mathrm{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{im})$$
$$= \mathrm{P}(A_{i1})\mathrm{P}(A_{i2}) \times \cdots \times \mathrm{P}(A_{im})$$

が満たされるときをいう.

任意の事象族 $\{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ について，その任意の有限個の要素からなる族が独立のとき，事象族 $\{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ は独立であるという.

定理 1.9

事象 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ が独立のとき，そのうちの一部をその補集合で置き換えて得られる事象族も独立である. すなわち，事象 B_i $(i = 1, \ldots, n)$ を A_i または A_i^c とするとき, $B_1, \ldots, B_n$ は互いに独立である.

定理 1.9 の証明

定理 1.10

事象 $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{B}$ が独立であるための必要十分条件は，$B_i = A_i$ または $B_i = A_i^c$, $i=1,\ldots,n$ のすべての組み合わせに対して

$$\mathrm{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathrm{P}(B_1) \times \cdots \times \mathrm{P}(B_n)$$

が成り立つことである.

定理 1.10 の証明

2.1. 確率変数の定義

確率統計A，2012年5月1日: P.13

確率変数について (1/2)

試行の結果は必ずしも数値をとるとは限らなく，また，多くの場合，試行の各結果にともなって値が定まるある量Xに関心がある.

ex1) 1枚の銅貨を2回投げる試行において表の出た回数Xに関心がある場合，標本点はHH, HT, TH, TTの4点であり，X は

$$X(\mathrm{HH})=2,\ X(\mathrm{HT})=1,\ X(\mathrm{TH})=1,\ X(\mathrm{TT})=0.$$

ex2) ある試行の事象 A の生起に関心がある場合には，

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega\in A)\\ 0 & (\omega\in A^c)\end{cases}.$$

確率統計A，2012年5月1日: P.14

確率変数について (2/2)

事象を数量として記述するために，もとの事象 (Ωの部分集合)を実数の部分集合に写す必要がある (写像X: $\Omega\to\mathbb{R}$が必要となる)!

確率変数: 標本空間 Ω 上の関数 $X(\omega)$ であって，さらに，事象 $X(\omega)\leq a$ の確率が誘導できるもの.
厳密には定義2.1のように定義される.

確率統計A，2012年5月1日: P.15

確率変数の定義

定義 2.1. $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$を確率空間とする．このとき，$\Omega$上の実数値関数$X(\omega)$が任意の実数$a$に対して

$$\{\omega; X(\omega)\leq a\}\in\mathcal{B}$$

を満たすとき，関数$X(\omega)$を$(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$上，または$(\Omega,\mathcal{B})$上の**確率変数** (**Random Variable**: **rv**) という.

注意事項 1 (1/2)

注 2.1. $\mathcal{B}=\wp(\Omega)$ (Ω の部分集合全体からなる集合) のときには，実数値関数$X(\omega)$はすべて確率変数である．Ωが有限または可算集合の場合には，通常$\mathcal{B}=\wp(\Omega)$と定めるので，すべての実数値関数$X(\omega)$が確率変数である．一般に, 確率変数の定義は$\mathcal{B}$ に依存している.

注意事項 1 (2/2)

注 2.2. 銅貨を無限回投げる試行において, n 回目に表が出れば 1, 裏がでれば 0 とする確率変数を X_n とする．このとき，初めて表が出たときの銅貨を投げた回数 T は，各 $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots)$ に対し,

$$T(\omega)=\begin{cases} n & (X_j(\omega)=0,\ j=1,2,\ldots,n-1,\ X_n(\omega)=1) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

と表され，$T(\omega)=+\infty$ となるのは毎回裏が出る場合に限られるから

$\{\omega:\ T(\omega)=+\infty\}\subset\{\omega:\ X_1(\omega)=\cdots=X_n(\omega)=0\}$

であり, これらの事象の確率を考え $n\to\infty$ とすると

$$\mathrm{P}(\{\omega:\ T(\omega)=+\infty\})\leq\lim_{n\to\infty}2^{-n}=0$$

である．このように, 確率変数のとる値として, $+\infty$ を認めることによって統一的に議論できる.

定理 2.1

確率変数XはΩ上で定義された実数または$+\infty$や$-\infty$の値をとるものとして一般化される．しかし，特に断らない限り，確率変数と言えば実数値をとるものとする．

定理2.1. XをΩ上の実数値関数とする．次の条件(1)，(2)は同値である．

(1) Xは$(\Omega,\mathcal{B})$上の確率変数である ($\{\omega;\ X(\omega)\leq a\}\in\mathcal{B}$).

(2) 任意の$A\in\mathbb{B}_1$に対して

$$X^{-1}(A)=\{\omega;\ X(\omega)\in A\}\in\mathcal{B}$$

ただし，$\mathbb{B}_1$は$\mathbb{R}$上のボレル集合体である．

定理 2.1 の証明

定理 2.2

定理2.2. X を $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の確率変数とし，任意の $A\in\mathbb{B}_1$ に対して

$$\mathrm{P}_X(A)=\mathrm{P}(X^{-1}(A))$$

とする．このとき，P_X は $(\mathbb{R},\mathbb{B}_1)$ 上の確率である．

定理 2.2 より，確率変数 X によって，$(\mathbb{R},\mathbb{B}_1)$ 上の確率 P_X が定義される．この P_X を確率変数 X によって**誘導された確率分布（測度）** (**induced probability distribution (measure)**) という．

定理 2.2 の証明