確率統計 A

第 2 章 確率変数と分布 (Part 3)

(2012 年 5 月 15 日)

講師:若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/

2.4. 確率変数の独立性

事象の独立性

2つの事象A, $B\in\mathcal{B}$について,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

が成り立つとき, AとBは**互いに独立である**という.

確率変数の独立性に関する定義

定義 2.3. $X_1,\dots,X_n$ を $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ 上の確率変数とする. 任意の区間 $I_1=(a_1,b_1],\dots,I_n=(a_n,b_n]$ に対して, n個の事象

$$\{\omega:X_1(\omega)\in I_1\},\dots,\{\omega:X_n(\omega)\in I_n\}$$

が互いに独立であるとき, $X_1,\dots,X_n$ は**互いに独立** (**mutually independent**) であるという.

独立性に関する注意

注 2.6. 任意の区間 $(a_i,b_i]$ と言えば, $(-\infty,b_i]$ も含まれるものとする.

注 2.7. 任意の区間 $I_1=(a_1,b_1],\dots,I_n=(a_n,b_n]$ に対して, n 個の事象$\{\omega:X_1(\omega)\in I_1\},\dots,\{\omega:X_n(\omega)\in I_n\}$ が互いに独立であれば, 任意のボレル集合$B_1,\dots,B_n$ に対して, n 個の事象 $\{\omega:X_1(\omega)\in B_1\},\dots,\{\omega:X_n(\omega)\in B_n\}$が互いに独立であることが, 確率測度の拡張定理を用いて示せる. この逆は明らかである. このことから, **区間の代わりにボレル集合を用いて確率変数の独立性を定義してもよい**.

定理 2.7

定理 2.7. $X_1,\dots, X_n$ の同時分布関数を $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$, X_i の周辺分布関数を$F_{X_i}(x_i)$ とする. このとき, $X_1,\dots, X_n$ が互いに独立であるための必要十分条件は

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

$$(x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,n)$$

が成立することである.

多次元確率変数の分布関数

任意の $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ に対して

$$F(x_1,\ldots,x_k)=\mathrm{P}(X_1\le x_1,\ldots,\ X_k\le x_k)$$

によって定義される関数 $F(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{X}$ の分布関数あるいは $X_1,\ldots,X_k$ の**同時(joint)分布関数**あるいは**結合分布関数**という.

すべての x_j $(j\neq i)$ について $x_j\to\infty$ とすると

$$\mathrm{P}(X_i\le x_i)=F(\infty,\ldots,\infty,x_i,\infty,\ldots,\infty)$$

が成り立つ. $F(\infty,\ldots,\ \infty,x_i,\infty,\ldots,\infty)$ は X_i の分布関数であるが, この場合**周辺分布関数** (**Marginal Distribution Function**) ともいう.

定理 2.7 の証明

2 つの確率ベクトルの独立性

$\mathbb{R}^n$ における任意の半開区間 $A=(a_{11},a_{21}]\times\cdots\times(a_{1n},a_{2n}]$ と $\mathbb{R}^m$ における任意の半開区間 $B=(b_{11},b_{21}]\times\cdots\times(b_{1m},b_{2m}]$ に対して

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X}\in A,\boldsymbol{Y}\in B)=\mathrm{P}(\boldsymbol{X}\in A)\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}\in B)$$

をみたすとき $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は独立であるという.

2.5. 離散型・連続型分布
2.5.1 1次元の場合

離散型確率変数と確率関数

確率変数 X のとりうる値が, 有限個または可算無限個の値をとるとき, **離散型** (**discrete type**) **確率変数**であるといい, その分布を**離散型分布**という. 例えばサイコロ投げの場合には, X は 1 から 6 までの 6 個の整数値しかとりえないので離散型分布である. 離散型分布は

$$f(x)=\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{P}(\{\omega: X(\omega)=x\}),\ x\in\mathbb{R}$$

によって決定される. $f(x)$ を**確率関数** (**probability function**) あるいは連続型の場合と同様に**確率密度関数** (**probability density function**, **pdf**) という.

確率関数の性質

X のとりうる値の集合を $D=\{x_j\colon j=1,2,\ldots\}$ とする. 定義から確率関数は次の性質をもつ.

$$[1].\ f(x_j)\geq 0,\ j=1,2,\ldots\quad [2].\sum_{j\geq 1} f(x_j)=1$$

離散型確率変数の場合には, とりうる値の集合 D 上における確率が問題になる. 確率関数は多くの場合 D 上に制限して

$$f(x)=\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{P}(\{\omega: X(\omega)=x\}),\ x\in D$$

と表される. 分布関数は

$$F(x)=\sum_{x_j\leq x} f(x_j)$$

と表せる.

連続型確率変数と確率密度関数

身長, 温度, バスの待ち時間などのように連続する値をとる場合を考える. すなわち, X のとりうる値は実数全体のある部分集合であるとする. とくに, X の分布関数が

$$\mathrm{P}(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \ {}^\forall x \in \mathbb{R}$$

と表せるとき, **連続型確率変数** (**Continuous Type Random Variable**) といい, その確率分布を**連続型分布**という. また, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を**確率密度関数** (**Probability Density Function**) という.

確率密度関数の性質

先の定義において,

$$\mathrm{P}(a < X \le b) = \int_{a}^{b} f(t)dt,$$

であり, $f(x)$ の連続点で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x),$$

が成立する. 定義から確率密度関数は次の性質をもつ.

$$[1].\ f(x) \ge 0, \ {}^\forall x \in \mathbb{R}$$

$$[2].\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

二項分布

2 項分布 (Binomial Distribution):

確率関数が

$$f(x) = \mathrm{P}(X = x) = {}_nC_x \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

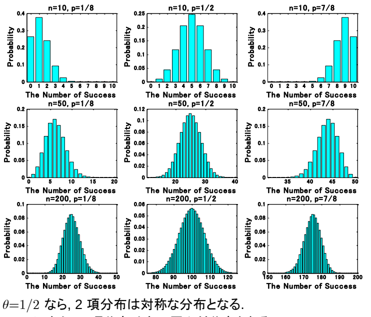
$$(x = 0, 1, \ldots, n)$$

で与えられる分布をパラメータ n, $\theta \in [0,1]$ の**2 項分布**といい, $B(n, \theta)$ で表す.

$D = \{0, 1, \ldots, n\}$ とおくと, 2項定理より

$$\mathrm{P}(X \in D) = \sum_{x=0}^{n} \mathrm{P}(X = x) = \{\theta + (1-\theta)\}^n = 1$$

二項分布の確率関数の形



1. もし $\theta=1/2$ なら, 2 項分布は対称な分布となる.
2. もし $\theta<1/2$ なら, 2 項分布は右に歪んだ分布となる.
3. もし $\theta>1/2$ なら, 2 項分布は左に歪んだ分布となる.
4. もし $n\to\infty$ なら, 2 項分布は対称な分布に近づく (正規分布に近づく).

確率統計A, 2012年5月15日: P.16

ポアソン分布

ポアソン分布 (Poisson Distribution)

確率関数が

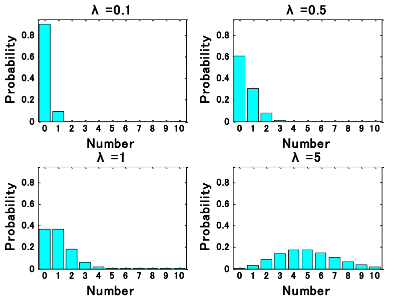
$$f(x)=\mathrm{P}(X=x)=\lambda^x e^{-\lambda}/x!\ \ (x=0,1,2,\ldots.)$$

で与えられる分布をパラメータ $\lambda\ (>0)$ の**ポアソン分布**といい, $p(\lambda)$ で表す. $D=\{0,1,2,\ldots\}$ とおくと,

$$\mathrm{P}(X\in D)=\sum_{x=0}^{\infty}\mathrm{P}(X=x)$$
$$=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\lambda^x/x!=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

確率統計A, 2012年5月15日: P.17

ポアソン分布の確率関数の形



1. ポアソン分布は常に右に歪んだ分布である.
2. もし $\lambda\to\infty$ なら, ポアソン分布は対称な分布に近づく.

確率統計A, 2012年5月15日: P.18

ベルヌーイ試行 (1/2)

成功率p,反復回数nの**ベルヌーイ** (**Bernoulli**) 試行とは,

(1) 各回の試行の結果は, AかA^cのどちらか一方しか起きない.

(2) 各回の試行の結果は, 他の試行の結果と互いに独立である.

(3) 事象Aが起こる確率 ($=p$) は毎回不変である.

を満たすn回の繰り返し試行のことである. 事象Aを成功, 事象A^cを失敗ともいう. また, このような試行の繰り返し試行を, ベルヌーイ試行列という.

ベルヌーイ試行 (2/2)

ある特定の事象Aの生起に着目する試行を繰り返す試行において, 第i回目の試行結果を表す確率変数X_iを, Aが起これば1をとり, A^c が起これば0をとるものとして定義する. このとき, n 回繰り返した一連の試行が成功率p, 反復回数nのベルヌーイ試行は,

(1) $\mathrm{P}(X_i=1)=p$, $\mathrm{P}(X_i=0)=1-p$ $(i=1,\ldots,n)$,

(2) 確率変数列 $X_1,\ldots,X_n$ は互いに独立である.

を満たす確率変数列 $X_1,\ldots,X_n$ とみなすことができる.このような確率変数列を成功率p, 反復回数nの**ベルヌーイ確率変数列**という.

定理 2.8

確率変数列 $X_1,\ldots,X_n$ を成功率p,反復回数nのベルヌーイ確率変数列とし, 成功の回数

$$S_n=X_1+\cdots+X_n$$

を考える. このとき, 次が成り立つ.

(1) 確率変数 S_n は2項分布 $B(n,p)$ に従う.

(2) 確率変数 S_n は2項分布 $B(n,p_n)$, $p_n=\lambda/n$ に従うとする. このとき

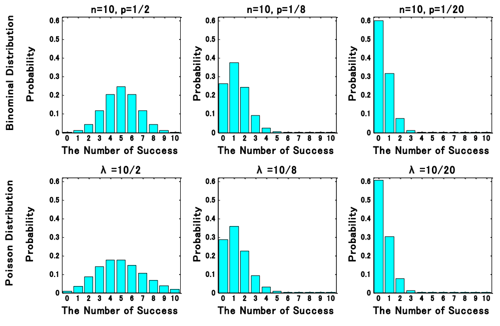
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(S_n=k)=p(k;\lambda),\ k=0,1,\ldots$$

ただし$p(k;\lambda)$は$p(\lambda)$の確率関数である.

ポアソン分布は成功確率が低い2項分布と見なすことができる

定理 2.8 (2) について

2 項分布において $n\to\infty$ と $p\to 0$ すれば $\lambda=np$ であるポアソン分布に近づく.



定理 2.8 の証明

その他の離散型確率分布

1. 幾何分布 (Geometrical Distribution): 確率関数が
   $f(x)=\mathrm{P}(X=x)=p(1-p)^x\ (x=0,1,2,\ldots.)$
   で与えられる分布をパラメータ $p\ (\in(0,1))$ の**幾何分布**といい, $G(p)$ で表す.
2. 負の 2 項分布 (Negative Binominal Distribution): 確率関数が
   $f(x)=\mathrm{P}(X=x)={}_{x+r-1}C_{r-1}p^r(1-p)^x\ (x=0,1,2,\ldots.)$
   で与えられる分布をパラメータ $r,\ p\ (\in(0,1))$ の**負の 2 項分布**といい, $NB(r,p)$ で表す.
3. 超幾何分布 (Hypergeometric Distribution): 確率関数が
   $f(x)=\mathrm{P}(X=x)={}_MC_x\,{}_{N-M}C_{n-x}/{}_NC_n$
   (x は非負の整数 $\max\{0,n-(N-M)\}\leq x\leq\min\{n,M\}$)
   で与えられる分布をパラメータ $N,\ M,\ n$ の**超幾何分布**といい, $HG(N,M,n)$ で表す.