確率統計 A

第 2 章 確率変数と分布 (Part 5)
第 3 章 平均と特性量 (Part 1)

(2012 年 5 月 29 日)

講師:若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/



## 2 次元確率関数と確率密度関数の性質

- 確率関数 (離散型)

$(1)\ f(x_i,y_j)\geq 0,\ i,j=1,2,\ldots.\quad (2)\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(x_i,y_j)=1.$

同時分布関数は, $F(x,y)=\sum_{x_i\leq x}\sum_{y_i\leq y}f(x_i,y_j)$

- 確率密度関数 (連続型)

$(1)\ f(x,y)\geq 0,\ {}^{\forall}(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad (2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1.$

同時分布関数は, $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=f(x,y)\right)$$



## 確率変数の独立性に関する定義

定義 2.3. $X_1,\ldots,X_n$ を $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ 上の確率変数とする. 任意の区間 $I_1=(a_1,b_1],\ldots,I_n=(a_n,b_n]$ に対して, $n$個の事象

$\{\omega{:}X_1(\omega)\in I_1\},\ldots,\ \{\omega{:}X_n(\omega)\in I_n\}$

が互いに独立であるとき, $X_1,\ldots,X_n$ は**互いに独立** (**mutually independent**) であるという.

定理 2.11

$(X,Y)$ は離散型あるいは連続型で, 同時確率密度関数 (または確率関数) および周辺確率密度関数 (または確率関数) を $f_{X,Y}(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ とする. $X$ と $Y$ が独立であることと,

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$
$$(x,y)\in D=\{(x,\ y);\ f_{X,Y}(x,y)>0\}$$

が成り立つことは同値である.



定理 2.11 の証明



2.5. 離散型・連続型分布
2.5.3 多次元の場合

## 多次元確率関数と確率密度関数の性質

- 確率関数 (離散型)

$$(1)\ f(x_{1i_2},\ldots,x_{ki_k}) \geq 0,\ i_1,\ldots,i_k = 1,2,\ldots.\quad (2)\ \sum_{i_1=1,\ldots,i_k=1}^{\infty} f(x_{1i_1},\ldots,x_{ki_k}) = 1.$$

同時分布関数は, $F(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{x_{1i_1}\leq x_1,\ldots,x_{ki_k}\leq x_k} f(x_{1i_1},\ldots,x_{ki_k})$

- 確率密度関数 (連続型)

$$(1)\ f(x_1,\ldots,x_k) \geq 0,\ {}^{\forall}(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^p$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\cdots dx_k = 1.$$

同時分布関数は, $F(x_1,\ldots,x_k) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k} f(u_1,\ldots,u_k)du_1\cdots du_k$

$$\left(\frac{\partial^p}{\partial x_1\cdots\partial x_k}F(x_1,\ldots,x_k) = f(x_1,\ldots,x_k)\right)$$



## 3 項分布の拡張

- 1回の試行で事象 $A$, $B$, $C$ のいずれかが起こりうるものとし, $A$ が起こる確率を $p_1$, $B$ が起こる確率を $p_2$ とすると, $C$ が起こる確率は $1-p_1-p_2$ である. このとき $n$ 回の独立な試行で, $A$ が起こる回数を $X$, $B$ が起こる回数を $Y$ とすれば $(X,Y)$ は 3 項分布に従う.
- 1回の試行で事象 $A_1,\ldots,A_{k+1}$ のいずれかが起こりうるものとし, $A_i$ が起こる確率を $p_i$ $(i=1,\ldots,k)$ とすると, $A_{k+1}$ が起こる確率は $1-(p_1+\cdots+p_k)$ である. このとき $n$ 回の独立な試行で, $A_i$ が起こる回数を $X_i$ $(i=1,\ldots,k)$ とするとすれば $(X_1,\ldots,X_k)'$ は $k+1$ 項分布に従う.



## 多項分布

多項分布 (Multinomial Distribution):

確率関数が

$$f(x_1,\ldots,x_k) = \mathrm{P}(X_1 = x_1,\ldots,X_k = x_k)$$

$$= \frac{n!\ \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}\ \ 1-\sum_{i=1}^{k} p_i^{\ \ n-\sum_{i=1}^{k} x_i}}{\prod_{i=1}^{k} x_i!\ \ n-\sum_{i=1}^{k} x_i\ \ !}$$

で与えられる分布をパラメータ $n$, $(p_1,\ldots,p_k)$ $(0\leq p_i$ $(i=1,\ldots,k)$, $p_1+\cdots+p_k\leq 1)$ の $k+1$ **多項分布**といい, $M_{k+1}(n,(p_1,\ldots,p_k))$ で表す. ただし, $(x_1,\ldots,x_k)\in D=\{(x_1,\ldots,x_k);\ x_i$ は非負整数, $x_1+\cdots+x_k\leq n\}$

## 2 次元正規分布の拡張

2 次元正規分布

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

ただし $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$.

多次元正規分布

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

ただし $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)'$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \cdots & \sigma_{kk} \end{pmatrix}$.



## 多次元正規分布

多次元正規分布 (Multivariate Normal Distribution)

確率密度関数が

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

で与えられる分布パラメータ $\boldsymbol{\mu}$, $\Sigma$ を持つ**多次元** (**$k$-次元**) **正規分布**といい, $N_k(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ と表す. ここに $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_k)'$, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_k)'$ $(-\infty<\mu_j<\infty;$ $j=1,\ldots,k)$, $\Sigma$ は対称な正定値行列である.



## 定理 2.10 の拡張

(周辺分布)

1. $(X_1,\ldots,X_k)$ が$k+1$項分布 $M_{k+1}(n,(p_1,\ldots,p_k))$ に従うとする. このとき, $X_1,\ldots,X_k$はそれぞれ2項分布 $B(n,p_1),\ldots,$ $B(n,p_k)$ に従う.
2. $(X_1,\ldots,X_k)$ が$k$次元正規分布 $N_k(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ に従うとする. このとき, $X_1,\ldots,X_k$はそれぞれ正規分布 $N(\mu_1,\sigma_{11}),\ldots,N(\mu_k,\sigma_{kk})$ に従う.

## 定理 2.11の拡張

定理2.12. $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_k)'$ は離散型あるいは連続型で, 同時確率密度関数 (または確率関数) および周辺確率密度関数 (または確率関数) を $f(\boldsymbol{x})$, $f_j(x_j)$ と $(j=1,..,k,$ $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_k)')$ する. $X_1,\ldots,X_k$ が独立であることと,

$$f(\boldsymbol{x})=f_1(x_1)\times\cdots\times f_k(x_k),$$
$$\boldsymbol{x}\in D=\{\boldsymbol{x}\ ;\ f(\boldsymbol{x})>0\}$$

が成り立つことは同値である.



## 3.1. 平均の定義



## 平均の定義 (離散型) (1/2)

定義 3.1. 確率変数 $X$ のとりうる値が有限個であるとき, 単純確率変数と呼ばれる. とり得る値の集合を $D=\{x_1,\ldots,x_n\}$ とするとき,

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{P}(X = x_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j)$$

を $X$ の**平均**または**平均値** (**mean**), あるいは**期待値** (**expectation**) という. ここに, $f(x)=\mathrm{P}(X=x)$ である.

## 平均の定義 (離散型) (2/2)

同様に, 離散型確率変数の場合で, とり得る値の集合が可算集合 $D=\{x_1,x_2,\dots\}$ のとき, $X$ の平均は

$$\mu=\mathrm{E}(X)=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\mathrm{P}(X=x_j)=\sum_{j=1}^{\infty}x_jf(x_j)$$

として定義される. この場合, 右辺の級数が絶対収束するとき, すなわち, $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|f(x_j)<\infty$ のとき, $X$ の平均は存在するという.



## 特性量の必要性

確率変数$X$の確率分布$\mathrm{P}_X$とは

$$\mathrm{P}_X(A)=\mathrm{P}(X\in A),\ A\in\mathbb{B}$$

によって定義される確率測度$\mathrm{P}_X$ のことである. 確率分布$\mathrm{P}_X$は分布関数

$$F_X(x)=\mathrm{P}_X((-\infty,x])=\mathrm{P}(X\in(-\infty,x])$$

によって一意的に定まることが知られている. また, 離散型あるいは連続型の場合には, その確率密度関数によって確率分布が定まる. しかし, 異なる分布を比較したり, 分布のだいたいの様子を表すためには, その分布の特徴を表すようないくつかの量が重要となる. 最も重要な量は**平均**である.



## 平均に関する解釈 (1/2)

数直線上の点 $x_j$, $j=1,\dots,n$ にそれぞれ質量 $f(x_j)$, $j=1,\dots,n$ の物体があるとき, つりあう点(重心)は

$$\mu=\sum_{j=1}^{n}x_jf(x_j)$$

である.

## 平均に関する解釈 (2/2)

$a$ 円支払ってゲームを行い, その結果 $X$ 円貰えるとする. $X$ のとりうる値は$x_j$, $j$=1,…,$m$ とし, このゲームを繰り返し行い, $i$ 回目に $X_i$ 円貰ったとする. $n$ 回行ったときの利得は $X_1+\cdots+X_n-na$ で与えられる. $X_1,\ldots,X_n$ のうち $x_j$ であるものの個数を $N_n(x_j)$ とすると,

$$X_1+\cdots+X_n = \sum_{j=1}^{m} x_j N_n(x_j)$$

と表せる. 従って, ゲームを $n$ 回行ったときの平均利得は

$$\frac{1}{n}\ X_1+\cdots+X_n-na \ = \sum_{j=1}^{m} x_j \frac{N_n(x_j)}{n} - a$$

$$\to \sum_{j=1}^{m} x_j \mathrm{P}(X=x_j) - a = \mu - a$$

に近づく.



## 平均の定義 (連続型)

定義 3.2. 確率変数 $X$ は連続型とし, その確率密度関数を $f(x)$ とする. このとき,

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

を $X$ の**平均**または**平均値** (**mean**), あるいは**期待値** (**expectation**) という. 右辺の積分が絶対積分可能であるとき, すなわち, $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ のとき, $X$ の平均は存在するという.



## Example

1. 確率変数$X$が$B(1,p)$に従うとすると, $\mathrm{E}(X)=p$.
2. 確率変数$X$が$B(n,p)$に従うとすると, $\mathrm{E}(X)=np$.
3. 確率変数$X$が $U(a,b]$に従うとすると, $\mathrm{E}(X)=(a+b)/2$.
4. 確率変数$X$が$N(\mu,\sigma^2)$に従うとすると, $\mathrm{E}(X)=\mu$.