

確率統計 A

第 2 章 確率変数と分布 (Part 5) 第 3 章 平均と特性量 (Part 1)

(2012 年 5 月 29 日)

講師:若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/>

確率統計 A, 2012年5月29日: P.1

2次元確率関数と確率密度関数の性質

• 確率関数 (離散型)

$$(1) f(x_i, y_j) \geq 0, i, j = 1, 2, \dots \quad (2) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1.$$

$$\text{同時分布関数は, } F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

• 確率密度関数 (連続型)

$$(1) f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

$$\text{同時分布関数は, } F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = f(x, y) \right)$$

確率統計 A, 2012年5月29日: P.2

確率変数の独立性に関する定義

定義 2.3. X_1, \dots, X_n を (Ω, \mathcal{B}, P) 上の確率変数とする. 任意の区間 $I_1 = (a_1, b_1], \dots, I_n = (a_n, b_n]$ に対して, n 個の事象

$$\{\omega: X_1(\omega) \in I_1\}, \dots, \{\omega: X_n(\omega) \in I_n\}$$

が互いに独立であるとき, X_1, \dots, X_n は **互いに独立 (mutually independent)** であるという.

確率統計 A, 2012年5月29日: P.3

定理 2.11

(X, Y) は離散型あるいは連続型で, 同時確率密度関数 (または確率関数) および周辺確率密度関数 (または確率関数) を $f_{X,Y}(x, y), f_X(x), f_Y(y)$ とする. X と Y が独立であることと,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$$

$$(x, y) \in D = \{(x, y); f_{X,Y}(x, y) > 0\}$$

が成り立つことは同値である.

確率統計 A, 2012年5月29日: P.4

定理 2.11 の証明

確率統計 A, 2012年5月29日: P.5

2.5. 離散型・連続型分布 2.5.3 多次元の場合

確率統計 A, 2012年5月29日: P.6

多次元確率関数と確率密度関数の性質

• 確率関数 (離散型)

$$(1) f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \geq 0, i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots \quad (2) \sum_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{\infty} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 1.$$

$$\text{同時分布関数は, } F(x_1, \dots, x_k) = \sum_{x_{i_1} \leq x_1, \dots, x_{i_k} \leq x_k} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

• 確率密度関数 (連続型)

$$(1) f(x_1, \dots, x_k) \geq 0, \forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^p$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = 1.$$

$$\text{同時分布関数は, } F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k$$

$$\left(\frac{\partial^p}{\partial x_1 \dots \partial x_k} F(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k) \right)$$

確率統計 A, 2012年5月29日: P.7

3 項分布の拡張

- 1回の試行で事象 A, B, C のいずれかが起こりうるものとし, A が起こる確率を p_1, B が起こる確率を p_2 とすると, C が起こる確率は $1-p_1-p_2$ である. このとき n 回の独立な試行で, A が起こる回数を X, B が起こる回数を Y とすれば (X, Y) は 3 項分布に従う.
- 1回の試行で事象 A_1, \dots, A_{k+1} のいずれかが起こりうるものとし, A_i が起こる確率を $p_i (i=1, \dots, k)$ とすると, A_{k+1} が起こる確率は $1-(p_1+\dots+p_k)$ である. このとき n 回の独立な試行で, A_i が起こる回数を $X_i (i=1, \dots, k)$ とするとすれば $(X_1, \dots, X_k)'$ は $k+1$ 項分布に従う.

確率統計 A, 2012年5月29日: P.8

多項分布

多項分布 (Multinomial Distribution):

確率関数が

$$f(x_1, \dots, x_k) = P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)$$

$$= \frac{n! \prod_{i=1}^k p_i^{x_i} 1 - \sum_{i=1}^k p_i}{\prod_{i=1}^k x_i! n - \sum_{i=1}^k x_i!}$$

で与えられる分布をパラメータ $n, (p_1, \dots, p_k)$ ($0 \leq p_i$ ($i=1, \dots, k$), $p_1 + \dots + p_k \leq 1$) の $k+1$ **多項分布** といい, $M_{k+1}(n, (p_1, \dots, p_k))$ で表す. ただし, $(x_1, \dots, x_k) \in D = \{(x_1, \dots, x_k); x_i \text{ は非負整数}, x_1 + \dots + x_k \leq n\}$

確率統計 A, 2012年5月29日: P.9

2次元正規分布の拡張

2次元正規分布

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\text{ただし } \mathbf{x} = (x_1, x_2)', \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)', \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

多次元正規分布

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\text{ただし } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)', \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)', \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \cdots & \sigma_{kk} \end{pmatrix}.$$

確率統計 A, 2012年5月29日: P.10

多次元正規分布

多次元正規分布 (Multivariate Normal Distribution)

確率密度関数が

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}),$$

で与えられる分布パラメータ $\boldsymbol{\mu}, \Sigma$ を持つ **多次元 (k -次元) 正規分布** といい, $N_k(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ と表す. ここに $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)', \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ ($-\infty < \mu_j < \infty$; $j=1, \dots, k$), Σ は対称な正定値行列である.

確率統計 A, 2012年5月29日: P.11

定理 2.10 の拡張

(周辺分布)

1. (X_1, \dots, X_k) が $k+1$ 項分布 $M_{k+1}(n, (p_1, \dots, p_k))$ に従うとする. このとき, X_1, \dots, X_k はそれぞれ 2 項分布 $B(n, p_1), \dots, B(n, p_k)$ に従う.
2. (X_1, \dots, X_k) が k 次元正規分布 $N_k(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従うとする. このとき, X_1, \dots, X_k はそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_{11}), \dots, N(\mu_k, \sigma_{kk})$ に従う.

確率統計 A, 2012年5月29日: P.12

定理 2.11の拡張

定理2.12. $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_k)'$ は離散型あるいは連続型で, 同時確率密度関数 (または確率関数) および周辺確率密度関数 (または確率関数) を $f(\mathbf{x}), f_j(x_j)$ と ($j=1, \dots, k$, $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_k)'$) する. X_1, \dots, X_k が独立であることと,

$$f(\mathbf{x})=f_1(x_1) \times \dots \times f_k(x_k),$$
$$\mathbf{x} \in D = \{\mathbf{x}; f(\mathbf{x}) > 0\}$$

が成り立つことは同値である.

確率統計 A, 2012年5月29日: P.13

3.1. 平均の定義

確率統計 A, 2012年5月29日: P.14

平均の定義 (離散型) (1/2)

定義 3.1. 確率変数 X のとりうる値が有限個であるとき, 単純確率変数と呼ばれる. とり得る値の集合を $D=\{x_1, \dots, x_n\}$ とするとき,

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^n x_j P(X = x_j) = \sum_{j=1}^n x_j f(x_j)$$

を X の**平均**または**平均値 (mean)**, あるいは**期待値 (expectation)** という. ここに, $f(x)=P(X=x)$ である.

確率統計 A, 2012年5月29日: P.15

平均の定義 (離散型) (2/2)

同様に, 離散型確率変数の場合で, とり得る値の集合が可算集合 $D=\{x_1, x_2, \dots\}$ のとき, X の平均は

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(x_j)$$

として定義される. この場合, 右辺の級数が絶対収束するとき, すなわち, $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| f(x_j) < \infty$ のとき, X の平均は存在するという.

確率統計 A, 2012年5月29日: P.16

特性量の必要性

確率変数 X の確率分布 P_X とは

$$P_X(A) = P(X \in A), A \in \mathbb{B}$$

によって定義される確率測度 P_X のことである。確率分布 P_X は分布関数

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x])$$

によって一意的に定まることが知られている。また、離散型あるいは連続型の場合には、その確率密度関数によって確率分布が定まる。しかし、異なる分布を比較したり、分布のだいたいの様子を表すためには、その分布の特徴を表すようないくつかの量が重要となる。最も重要な量は**平均**である。

確率統計 A, 2012年5月29日: P.17

平均に関する解釈 (1/2)

数直線上の点 $x_j, j=1, \dots, n$ にそれぞれ質量 $f(x_j), j=1, \dots, n$ の物体があるとき、つりあう点(重心)は

$$\mu = \sum_{j=1}^n x_j f(x_j)$$

である。

確率統計 A, 2012年5月29日: P.18

平均に関する解釈 (2/2)

a 円支払ってゲームを行い、その結果 X 円貰えるとする。 X のとりうる値は $x_j, j=1, \dots, m$ とし、このゲームを繰り返して行い、 i 回目に X_i 円貰ったとする。 n 回行ったときの利得は $X_1 + \dots + X_n - na$ で与えられる。 X_1, \dots, X_n のうち x_j であるものの個数を $N_n(x_j)$ とすると、

$$X_1 + \dots + X_n = \sum_{j=1}^m x_j N_n(x_j)$$

と表せる。従って、ゲームを n 回行ったときの平均利得は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} X_1 + \dots + X_n - na &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{N_n(x_j)}{n} - a \\ &\rightarrow \sum_{j=1}^m x_j P(X = x_j) - a = \mu - a \end{aligned}$$

に近づく。

確率統計 A, 2012年5月29日: P.19

平均の定義 (連続型)

定義 3.2. 確率変数 X は連続型とし、その確率密度関数を $f(x)$ とする。このとき、

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

を X の**平均**または**平均値 (mean)**、あるいは**期待値 (expectation)** という。右辺の積分が絶対積分可能であるとき、すなわち、 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$ のとき、 X の平均は存在するという。

確率統計 A, 2012年5月29日: P.20

Example

1. 確率変数 X が $B(1, p)$ に従うとすると, $E(X) = p$.
2. 確率変数 X が $B(n, p)$ に従うとすると, $E(X) = np$.
3. 確率変数 X が $U(a, b]$ に従うとすると,
 $E(X) = (a+b)/2$.
4. 確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとすると, $E(X) = \mu$.