

確率統計 A

第 3 章 平均と特性量 (Part 3)

(2012 年 6 月 12 日)

- 講師: 若木宏文
- E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
- Web: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/>

確率統計 A, 2012年6月12日: P.1

3.3. 特性量

確率統計 A, 2012年6月12日: P.2

モーメントの定義

定義 3.3.

1. 原点のまわりの k 次モーメント: $\mu_k = E(X^k)$.
2. 原点のまわりの k 次絶対モーメント:
 $\nu_k = E(|X|^k)$.
3. 平均値のまわりの k 次モーメント:
 $\alpha_k = E\{[X - E(X)]^k\}$
 $= E\{(X - \mu)^k\} \quad (\mu = \mu_1)$.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.3

モーメントの存在

定理 3.6. 確率変数 X は有限な n 次モーメントをもつとする. このとき, X の n 次以下のモーメントも有限である. すなわち

$$E(|X|^n) < \infty \Rightarrow E(|X|^m) < \infty \quad (m=0,1,\dots,n).$$

(Proof) 定理 3.4 (3) および不等式 $|X|^m \leq |X|^{n+1}$ より得られる.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.4

分散, 歪度, 尖度

定義 3.4.

1. **分散 (Variance)**: 分布のばらつきを表す尺度.

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E\{(X-\mu)^2\} = \alpha_2.$$

2. **歪度 (Skewness)**: 分布の歪みを表す尺度.

$$\beta_1 = \alpha_3 / \sigma^3 = E[\{(X-\mu)/\sigma\}^3].$$

特に正規分布の場合は $\beta_1=0$.

3. **尖度 (Kurtosis)**: 分布の裾の広さを表す尺度.

$$\beta_2 = \alpha_4 / \sigma^4 = E[\{(X-\mu)/\sigma\}^4].$$

特に正規分布の場合は $\beta_2=3$. そのため, 尖度 $\beta_2 = \alpha_4 / \sigma^4 - 3$ と定義することもある.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.5

Example 1

Example 3.5.

1. 正規分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき:

$$E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2, \beta_1 = 0, \beta_2 = 3.$$

2. 2項分布, $X \sim B(n, p)$ のとき:

$$E(X) = np, \text{Var}(X) = npq, (q=1-p),$$

$$\beta_1 = -(p-q)/(npq)^{1/2},$$

$$\beta_2 = (1-6pq+3npq)/npq.$$

確率統計 A, 2012年6月12日: P.6

分散に関する定理

定理 3.7. 確率変数 X の分散に対して, 次が成り立つ. ただし, a は定数である.

1. $\text{Var}(X+a)=\text{Var}(X)$,
2. $\text{Var}(aX)=a^2\text{Var}(X)$,
3. $\text{Var}(X)=E(X^2)-E(X)^2$.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.7

定理3.7の証明

確率統計 A, 2012年6月12日: P.8

モーメントに関する不等式

定理 3.8.

1. (**Markov**) X を非負値確率変数とする. 任意の正数 a に対して

$$P(X \geq a) \leq E(X)/a.$$

注 3.6) $E(X)=0$ のとき, $P(X=0)=1$.

2. (**Chevyshev**) 確率変数 X の平均, 分散を

$$E(X)=\mu, \text{Var}(X)=\sigma^2 < \infty$$

とする. 任意の正数 k に対して

$$P(|X-\mu| \geq k) \leq \sigma^2/k^2.$$

確率統計 A, 2012年6月12日: P.9

定理3.8の証明

確率統計 A, 2012年6月14日: P.10

共分散&相関係数

定義 3.5. 確率変数 X, Y に対して

$$\text{Cov}(X, Y) = E[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}]$$

を X と Y の **共分散 (Covariance)** と呼ぶ. また

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

を X と Y の **相関係数 (Correlation Coefficient)** と呼ぶ. $\rho(X, Y) = 0$ のとき無相関, また $\rho(X, Y)$ が正のとき **正の相関** があると言い, 負のときは **負の相関** があると言う.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.11

注 3.7

定理3.10で示されるように, $|\rho(X, Y)| \leq 1$ である. また定理3.11より $|\rho(X, Y)|$ の大きさは X と Y の線形関係の強さを表している. そのため $|\rho(X, Y)|$ が 1 に近いときは **強い相関** があると言い, 0 に近いときは **弱い相関** があると言う. 確率変数 X と Y の相関係数 $\rho(X, Y)$ は, それらの関連の強さを測る尺度であるが, 直線的関連の度合いを測る尺度であることに注意したい.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.12

共分散&相関係数に関する定理 (1/2)

定理 3.9. X, Y, Z を確率変数, a を定数とする. このとき以下が成り立つ.

1. $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$,
2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$,
3. $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$,
4. $\text{Cov}(aX, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$,
5. $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,
6. X と Y が独立 $\Rightarrow \rho(X, Y) = 0$.
7. X と Y が有限な分散を持つとする. このとき
 $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.13

定理3.9の証明

確率統計 A, 2012年6月18日: P.14

共分散&相関係数に関する定理 (2/2)

定理 3.10. 確率変数 X, Y は有限な分散を持つとする. このとき

$$\{\text{Cov}(X, Y)\}^2 \leq \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$$

が成り立つ. したがって,

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

等号が成り立つのは以下の1, 2, 3のいずれかである.

1. $P(X = E(X)) = 1$,
2. $P(Y = E(Y)) = 1$,
3. 定数 a, b が存在して, $P(Y = a + bX) = 1$.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.15

定理3.10の証明

確率統計 A, 2012年6月14日: P.16

平均ベクトル&共分散行列

定義 3.6. p 次元確率ベクトル $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_p)'$ について

$$E(X_i)=\mu_i, E\{(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\}=\sigma_{ij} \quad (i, j=1, \dots, n),$$

とする. このとき

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

をそれぞれ \mathbf{X} の平均ベクトル, 共分散行列と呼ぶ.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.17

注 3.8

$E(\mathbf{X})=\boldsymbol{\mu}$ とおくと, 共分散行列は

$$\text{Cov}(\mathbf{X})=\boldsymbol{\Sigma}=E\{(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\}$$

と表せる. このことより, 共分散行列は半正定値行列であることがわかる.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.18

Example 2

Example 3.6.

1. 3項分布, $\mathbf{X} \sim M_3(n, \mathbf{p})$ の場合:

$$E(\mathbf{X}) = n\mathbf{p} = \begin{pmatrix} np_1 \\ np_2 \end{pmatrix}, \text{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 \\ -np_1p_2 & np_2(1-p_2) \end{pmatrix}$$

2. 2次元正規分布, $\mathbf{X} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ の場合:

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \text{Cov}(\mathbf{X}) = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

確率統計 A, 2012年6月12日: P.19

定理3.11

2次元確率ベクトル $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ の平均ベクトルと共分散行列を

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

とする. ただし $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \beta} E\{(X_2 - \alpha - \beta X_1)^2\} &= E\{(X_2 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_1)^2\} \\ &= \sigma_2^2(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

となる. ここに $\hat{\alpha} = \mu_2 - \hat{\beta}\mu_1, \hat{\beta} = \rho\sigma_2 / \sigma_1$.

確率統計 A, 2012年6月12日: P.20

定理3.11の証明

確率統計 A, 2012年6月18日: P.21

注 3.9

確率変数 X_2 を X_1 の1次結合 $\alpha + \beta X_1$ で近似するときの誤差を $E[\{X_2 - (\alpha + \beta X_1)\}^2]$ で測るとき、これを最小にする最良近似

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_2 = \mu_2 + \rho(\sigma_2 / \sigma_1)(X_1 - \mu_1)$$

の誤差は $\sigma_2^2(1 - \rho^2)$ である。 $|\rho|$ が大きくなると誤差は小さくなる。

確率統計 A, 2012年6月12日: P.22
