

# 確率統計 A

## 第 3 章 平均と特性量 (Part 2)

(2012 年 6 月 5 日)

講師: 若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/>

確率統計 A, 2012年6月5日: P.1

---

---

---

---

---

---

---

---

### 3.2. 基本的性質

確率統計 A, 2012年6月5日: P.2

---

---

---

---

---

---

---

---

#### 確率変数の関数の期待値 (1/2)

$$\text{確率変数の期待値: } E(X) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(x_j) & (\text{離散型}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & (\text{連続型}) \end{cases}$$

では  $E\{g(X)\}$  は?

定義に従えば, 確率変数  $Y=g(X)$  の確率関数または確率密度関数  $h(y)$  を求め,

$$E\{g(X)\} = E(Y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} y_j h(y_j) & (\text{離散型}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy & (\text{連続型}) \end{cases}$$

を計算すればよい.

確率統計 A, 2012年6月5日: P.3

---

---

---

---

---

---

---

---

### Example 3.3

$X \sim U(0,1]$  のとき,  $Y = X^2$  の平均を計算してみよう!

$X$  の確率密度関数は  $f_X(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \leq 1) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$

分布関数は  $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$

確率統計 A, 2012年6月5日: P.4

---

---

---

---

---

---

---

---

### 確率変数の関数の期待値 (2/2)

定理 3.1. 確率変数  $X$  が離散型のとき, そのとる値を  $x_j, j=1,2,\dots$  とし確率関数を  $f(x_j)$  とする. また  $X$  が連続型のとき, その確率密度関数を  $f(x)$  とする. このとき

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) f(x_j) & (\text{離散型}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & (\text{連続型}) \end{cases}$$

注 3.3. この定理は,  $g(X)$  の平均が本来  $g(X)$  の分布から求められるべきであるが,  $X$  の分布から求められることを述べている.

確率統計 A, 2012年6月5日: P.5

---

---

---

---

---

---

---

---

### 定理 3.1 の多変量版

定理 3.2.  $n$  次元確率ベクトル  $X$  が離散型のとき, とりうる値を  $x_1, x_2, \dots$  とし確率関数を  $f(x_j)$  とする. また,  $X$  が連続型のとき, その確率密度関数を  $f(x)$  とする. このとき,

$$E\{g(X)\} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) f(x_j) & (\text{離散型}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & (\text{連続型}) \end{cases}$$

確率統計 A, 2012年6月5日: P.6

---

---

---

---

---

---

---

---

### 定理3.2の証明(離散型の場合)

確率統計A, 2012年6月5日: P.7

---

---

---

---

---

---

---

---

### 変数変換後の確率密度関数 (1/2)

定理 3.3.  $n$  次元確率ベクトル  $X$  は連続型で, 確率密度関数  $f(x_1, \dots, x_n)$  をもつとする. また,  $X$  のとりうる値は領域  $\mathcal{X} = \{x; f(x) > 0\} \subset \mathbb{R}^n$  であるとする.  $x = (x_1, \dots, x_n)'$  から  $y = (y_1, \dots, y_n)'$  への変換

$$\begin{cases} y_1 = u_1(x) = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = u_n(x) = u_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

は領域  $\mathcal{X}$  を領域  $\mathcal{Y}$  に写し, 次の性質 (1)~(3) をみたすとする.

1. 1-1 である.
2. 逆変換

$$y \rightarrow x \quad x_i = v_i(y) = v_i(y_1, \dots, y_n), \quad i=1, \dots, n$$

は  $C^1$  クラスである.

確率統計A, 2012年6月5日: P.8

---

---

---

---

---

---

---

---

### 変数変換後の確率密度関数 (2/2)

3. ヤコビ行列式

$$J = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \cdots & \partial x_1 / \partial y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_n / \partial y_1 & \cdots & \partial x_n / \partial y_n \end{vmatrix}$$

の値が任意の  $y \in \mathcal{Y}$  に対して 0 でない.

この変換により定義される確率変数を

$$Y_i = u_i(X) = u_i(X_1, \dots, X_n), \quad i=1, \dots, n$$

とする. このとき,  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)'$  の確率密度関数は次式で与えられる.

$$h(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} f(v_1(y), \dots, v_n(y)) |J| & (y \in \mathcal{Y}) \\ 0 & (y \in \mathcal{Y}^c) \end{cases}$$

確率統計A, 2012年6月5日: P.9

---

---

---

---

---

---

---

---

### 定理3.3の証明

確率統計 A, 2012年6月5日: P.10

---

---

---

---

---

---

---

---

### 定理3.2の証明(連続型の場合)

確率統計 A, 2012年6月5日: P.11

---

---

---

---

---

---

---

---

### Example

$X_1$ と $X_2$ が独立で $N(0,1)$ に従うとき,  
 $Y_1=X_1+X_2$ と $Y_2=X_1-X_2$ の同時確率密度関数を計算してみよう!

$X_1$ と $X_2$ の同時確率密度関数は

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_1^2 / 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_2^2 / 2)$$

確率統計 A, 2012年6月5日: P.12

---

---

---

---

---

---

---

---

期待値に関する関係式 (1/2)

定理 3.4. 確率変数  $X$  と  $Y$  は平均を持つとする.

1. 任意の定数  $a$  に対して  
 $E(aX) = aE(X)$
2.  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
3.  $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

確率統計 A, 2012年6月5日: P.13

---

---

---

---

---

---

---

---

定理3.4の証明

確率統計 A, 2012年6月5日: P.14

---

---

---

---

---

---

---

---

期待値に関する関係式 (2/2)

定理 3.5. 確率変数  $X$  と  $Y$  は平均を持ち独立とする. このとき

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

注3.5. 定理3.2と定理3.5を用いると, 確率変数  $X$  と  $Y$  が独立とすると

$$E\{g(X)h(Y)\} = E\{g(X)\}E\{h(Y)\}.$$

( $g$  と  $h$  に少し仮定が必要. また,  $E\{g(X)\}$  と  $E\{h(Y)\}$  が存在することも必要)

確率統計 A, 2012年6月5日: P.15

---

---

---

---

---

---

---

---

定理3.5の証明

確率統計A, 2012年6月5日: P.16

---

---

---

---

---

---

---

---