確率統計 A

第 3 章 平均と特性量 (Part 2)

(2012 年 6 月 5 日)

講師:若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/

3.2. 基本的性質

確率変数の関数の期待値 (1/2)

確率変数の期待値 : $\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(x_j) & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{(連続型)} \end{cases}$

では $\mathrm{E}\{g(X)\}$ は?

定義に従えば, 確率変数 $Y=g(X)$ の確率関数または確率密度関数 $h(y)$ を求め,

$$\mathrm{E}\{g(X)\} = \mathrm{E}(Y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} y_j h(y_j) & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy & \text{(連続型)} \end{cases}$$

を計算すればよい.

Example 3.3

$X \sim U(0,1]$ のとき, $Y=X^2$ の平均を計算してみよう!

X の確率密度関数は $f_X(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \le 1) \\ 0 & \text{(上記以外)} \end{cases}$

分布関数は $F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x & (0 < x \le 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$

確率変数の関数の期待値 (2/2)

定理 3.1. 確率変数 X が離散型のとき, そのとる値を $x_j, j=1,2,\ldots$ とし確率関数を $f(x_j)$ とする. また X が連続型のとき, その確率密度関数を $f(x)$ とする. このとき

$$\mathrm{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) f(x_j) & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & \text{(連続型)} \end{cases}$$

注 3.3. この定理は, $g(X)$ の平均が本来 $g(X)$ の分布から求められるべきであるが, X の分布から求められることを述べている.

定理 3.1 の多変量版

定理 3.2. n 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ が離散型のとき, とりうる値を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ とし確率関数を $f(\boldsymbol{x}_j)$ とする. また, $\boldsymbol{X}$ が連続型のとき, その確率密度関数を $f(\boldsymbol{x})$ とする. このとき,

$$\mathrm{E}\{g(\boldsymbol{X})\} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} g(\boldsymbol{x}_j) f(\boldsymbol{x}_j) & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} & \text{(連続型)} \end{cases}$$

定理3.2の証明(離散型の場合)

変数変換後の確率密度関数 (1/2)

定理 3.3. n 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ は連続型で, 確率密度関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ をもつとする. また, $\boldsymbol{X}$ のとりうる値は領域 $\mathcal{X}=\{\boldsymbol{x}; f(\boldsymbol{x})>0\}\subset\mathbb{R}^n$ であるとする. $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)'$ から $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_n)'$ への変換

$$\begin{cases} y_1 = u_1(\boldsymbol{x}) = u_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \qquad\vdots \\ y_n = u_n(\boldsymbol{x}) = u_n(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

は領域 $\mathcal{X}$ を領域 $\mathcal{Y}$ に写し, 次の性質 (1)～(3) をみたすとする.

1. 1-1 である.
2. 逆変換

$$\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}: \quad x_i=v_i(\boldsymbol{y})=v_i(y_1,\ldots, y_n), \quad i=1,\ldots,n$$

は C^1 クラスである.

変数変換後の確率密度関数 (2/2)

3. ヤコビ行列式

$$J = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \cdots & \partial x_1 / \partial y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_n / \partial y_1 & \cdots & \partial x_n / \partial y_n \end{vmatrix}$$

の値が任意の $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ に対して0でない.

この変換により定義される確率変数を

$$Y_i = u_i(\boldsymbol{X}) = u_i(X_1,\ldots,X_n),\ i=1,\ldots,n$$

とする. このとき, $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)'$ の確率密度関数は次式で与えられる.

$$h(y_1,\ldots,y_n) = \begin{cases} f(v_1(\boldsymbol{y}),\ldots,v_n(\boldsymbol{y}))\,|\,J\,| & (\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}) \\ 0 & (\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^c) \end{cases}$$

定理3.3の証明

定理3.2の証明(連続型の場合)

Example

X_1とX_2が独立で$N(0,1)$に従うとき, $Y_1 = X_1 + X_2$ と$Y_2 = X_1 - X_2$ の同時確率密度関数を計算してみよう!

X_1とX_2の同時確率密度関数は

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_1^2 / 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_2^2 / 2)$$

期待値に関する関係式 (1/2)

定理 3.4. 確率変数 X と Y は平均を持つとする.

1. 任意の定数 a に対して $\mathrm{E}(aX)=a\mathrm{E}(X)$
2. $\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$
3. $X\leq Y \Rightarrow \mathrm{E}(X)\leq\mathrm{E}(Y)$

定理3.4の証明

期待値に関する関係式 (2/2)

定理 3.5. 確率変数 X と Y は平均を持ち独立とする. このとき

$$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

注3.5. 定理3.2と定理3.5を用いると, 確率変数XとYが独立とすると

$$\mathrm{E}\{g(X)h(Y)\}=\mathrm{E}\{g(X)\}\mathrm{E}\{h(Y)\}.$$

(gとhに少し仮定が必要. また, $\mathrm{E}\{g(X)\}$と$\mathrm{E}\{h(Y)\}$が存在することも必要)

定理3.5の証明