確率統計 A

第 4 章 特性関数 (Part 1)

(2012 年 7 月 10 日)

- 講師:若木宏文
- E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
- Web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/

4.1. 特性関数とモーメント

何故特性関数が必要か

- **特性関数**は確率密度関数 のフーリエ変換 (Fourier Transform) として定義される.
- 確率変数 X の特性関数と分布は一対一対応をしている.
- 特性関数がわかれば X の分布がわかる.

ex) $X_1,\dots,X_n \sim i.i.d.\, N(\mu,\sigma^2)$ のとき

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\left(\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$ の分布は?

$i.i.d$ は 'Independently and Identically Distributed' の略記で $\sim i.i.d.$ で独立に同一の分布に従うという意味となる.

定義 4.1

確率変数 X の分布を P_X とする. $f(x)$ を, P_X が連続型のときは確率密度関数, 離散型のときは確率関数を表すとする. $\mathbb{R}$ 上で定義された関数

$$\varphi_X(t)=\mathrm{E}(e^{itX})\quad (t\in\mathbb{R})$$

$$=\begin{cases}\sum_x e^{itx}f(x) & \text{離散型}\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)dx & \text{連続型}\end{cases}$$

を X の特性関数という (確率密度関数 f のフーリエ変換).

Example 4.1

二項分布, ポアソン分布, 一様分布, 正規分布の特性関数は, 次のように与えられる.

(二項分布) $X \sim B(n,p) \Rightarrow \varphi_X(t) = \{1+p(e^{it}-1)\}^n$.

(ポアソン分布) $X \sim p(\lambda) \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$.

(一様分布) $X \sim U(0,1) \Rightarrow \varphi_X(t) = (e^{it}-1)/it$.

(正規分布) $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp(it\mu - \sigma^2 t^2/2)$.

Ex 4.1 の導出法 (正規分布, 二項分布)

定理 4.1

(1) $\varphi_X(0)=1$.

(2) $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

(3) $\varphi_X(t)$ は一様連続である.

(4) $\varphi_{cX+d}(t) = e^{itd}\varphi_X(ct)$.

(5) $\mathrm{E}(|X|^n) < \infty$ であれば $\varphi_X(t)$ は C^n クラス (連続な n 次導関数が存在) で,

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)\bigg|_{t=0} = i^n \mathrm{E}(X^n).$$

定理4.1 の証明

Example 4.2

特性関数が得られているとすると, 各分布の平均, 分散等を定理 4.1 (5) を利用して簡単に求めることができる. 例えば, 正規分布の場合,

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき,

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^k] = \begin{cases} 0 & (k \text{が奇数}) \\ 1 \times 3 \times \cdots \times (k-1) \times \sigma^k & (k \text{が偶数}) \end{cases}.$$

Example 4.2 の証明

定義 4.2

$p=1$ のときは定義4.1と一致する.

(多次元分布の特性関数) $\boldsymbol{X}$ を p 次元確率変数, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^p$ とし,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix},$$

とする. このとき

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{E}[\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X})] = \mathrm{E}\left[\prod_{j=1}^{p} \exp(it_j X_j)\right],$$

を $\boldsymbol{X}$ の特性関数という.

ex 4.3) $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \Rightarrow \varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{t}'\Sigma\boldsymbol{t}/2)$.

Ex 4.3 の導出

定義 4.2 のおまけ 1

(多次元確率変数の関数として表されている確率変数の特性関数) $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_p)'$ を p 次元確率変数とし, $S(\boldsymbol{X})$ を $\boldsymbol{X}$ で構成される確率変数とする. このとき, $\boldsymbol{X}$ の同時密度関数を $f(\boldsymbol{x})$ とし, $t\in\mathbb{R}$ とすると, $S(\boldsymbol{X})$ の特性関数は,

$$\varphi_S(t)=\begin{cases}\sum_{\boldsymbol{x}} e^{its(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x}) & \text{離散型}\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{its(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} & \text{連続型}\end{cases}$$

で定義される.

ex 4.4) $X_1,\ldots,X_n \sim i.i.d.\, N(\mu,\sigma^2)$ のとき $S(\boldsymbol{X})=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$

$\left(\bar{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$ の特性関数は $\varphi_S(t)=\exp(-t^2/2)$.

正規分布の特性

1. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$とする. 定数a, $b(>0)$ に対して, $Y=a+bX$とおくと, $Y\sim N(a+b\mu,b^2\sigma^2)$となる.

2. $X_1,\ldots,X_n$は互いに独立で, それぞれ $X_j\sim N(\mu_j,\sigma^2)$であるとする. このとき, $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)'\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\sigma^2 I_n)$となる. ただし, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)'$であり$I_n$は$n$次の単位行列を表す.

Ex 4.4 の導出

正規分布の特性の証明

定義 4.2 のおまけ 2

(特性関数と確率変数の独立性) $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)'$, $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2)'$ とする. このとき,

$$X_1 \text{ と } X_2 \text{ が独立} \Leftrightarrow \varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2).$$

簡単な証明⇒)

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(it_1x_1 + it_2x_2) f(x_1,x_2) dx_1 dx_2.$$

X_1 と X_2 が独立であれば, $f(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ であるので,

$$\begin{aligned}\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(it_1x_1 + it_2x_2) f_1(x_1)f_2(x_2)\, dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it_1x_1) f_1(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it_2x_2) f_2(x_2)\, dx_2 \\ &= \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2).\end{aligned}$$

定理 4.2

次の右辺の期待値が存在すれば等式が成り立つ.

$$\left.\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_p}}{\partial t_1^{n_1}\cdots\partial t_p^{n_p}}\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}} = i^{n_1+\cdots+n_p}\mathrm{E}(X_1^{n_1}\cdots X_p^{n_p}).$$

定理 4.1 (5) の多次元版:
$p=1$ のときは一致する.