

確率統計 A

第 4 章 特性関数 (Part 2)

(2012 年 7 月 24 日)

- 講師: 若木宏文
- E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
- Web: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/>

確率統計 A, 2012年7月24日: P.1

何故特性関数が必要か

- **特性関数**は確率密度関数のフーリエ変換 (Fourier Transform) として定義される.
- 確率変数 X の特性関数と分布は一対一対応をしている.
- 特性関数がわかれば X の分布がわかる.

ex) $X_1, \dots, X_n \sim i.i.d. N(\mu, \sigma^2)$ のとき

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \left(\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \text{ の分布は?}$$

i.i.d. は 'Independently and Identically Distributed' の略記で $\sim i.i.d.$ で独立に同一の分布に従うという意味となる.

確率統計 A, 2012年7月24日: P.2

4.1. 特性関数とモーメント

確率統計 A, 2012年7月24日: P.3

定義 4.1

確率変数 X の分布を P_X とする. $f(x)$ を, P_X が連続型のときは確率密度関数, 離散型のときは確率関数を表すとする. \mathbb{R} 上で定義された関数

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{itx} f(x) & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx & \text{連続型} \end{cases}$$

を X の特性関数という
(確率密度関数 f のフーリエ変換).

確率統計 A, 2012年7月24日: P.4

定義 4.2

$p=1$ のときは定義4.1と一致する.

(多次元分布の特性関数) X を p 次元確率変数, $t \in \mathbb{R}^p$ とし,

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix},$$

とする. このとき

$$\varphi_X(t) = E[\exp(it'X)] = E\left[\prod_{j=1}^p \exp(it_j X_j)\right],$$

を X の特性関数という.

確率統計 A, 2012年7月24日: P5

定理 4.2

次の右辺の期待値が存在すれば等式が成り立つ.

$$\left. \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_p}}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_p^{n_p}} \varphi_X(t) \right|_{t=0} = i^{n_1 + \dots + n_p} E(X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p}).$$

定理 4.1 (5) の多次元版:
 $p=1$ のときは一致する.

確率統計 A, 2012年7月24日: P6

4.2. 分布と特性関数

確率統計 A, 2012年7月24日: P7

定理 4.3

(反転公式) 確率変数 X の分布関数 (df) と特性関数 (cf) をそれぞれ F_X, φ_X とする. このとき, 連続点 a, b ($a < b$) において

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt$$

が成り立つ.

(注) 分布関数は $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$ であるので, 反転公式から分布の確率計算ができる.

確率統計 A, 2012年7月24日: P8

定理 4.3 の系

(反転公式) もし

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)| dt < \infty$$

であれば, X は連続型であり, 確率密度関数 $f_X(x)$ が存在し,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$$

が成り立つ.

確率統計 A, 2012年7月24日: P.9

定理 4.4

(一意性定理) 確率変数 X_1, X_2 の分布を d_1, d_2 とする. またそれらの特性関数を φ_1, φ_2 とする. このとき,

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow d_1 = d_2.$$

注. X_1, X_2 が多次元確率ベクトルの場合にも成り立つ.

ex 4.4) $(X_1, X_2) \sim M_3(n, (p_1, p_2))$ (3項分布) のとき, $X_1 \sim B(n, p_1)$ である.

確率統計 A, 2012年7月24日: P.10

Ex 4.4 の証明

確率統計 A, 2012年7月24日: P.11

Example 4.5

再生性: 定理 4.4 とそれぞれの特性関数により以下が言える.

(二項分布) $X_1 \sim B(n_1, p), X_2 \sim B(n_2, p), X_1$ と X_2 は独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$.

(ポアソン分布) $X_1 \sim p(\lambda_1), X_2 \sim p(\lambda_2), X_1$ と X_2 は独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim p(\lambda_1 + \lambda_2)$.

(正規分布) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), X_1$ と X_2 は独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

確率統計 A, 2012年7月24日: P.12

Ex 4.5 の導出 (正規分布, 二項分布)

確率統計 A, 2012年7月24日: P.13

定理 4.4 の系

(特性関数と確率変数の独立性) $X=(X_1, X_2)'$, $t=(t_1, t_2)'$ とする. このとき,

$$X_1 \text{ と } X_2 \text{ が独立} \Leftrightarrow \varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2).$$

簡単な証明

$$\begin{aligned} \Rightarrow) \varphi_X(t) &= E\{\exp(it_1 X_1) \exp(it_2 X_2)\} \\ &= E\{\exp(it_1 X_1)\} E\{\exp(it_2 X_2)\} \\ &= \varphi_{X_1}(t_1) \varphi_{X_2}(t_2). \end{aligned}$$

$\Leftarrow) Y_1, Y_2$ は独立で, Y_1 は X_1 と同じ分布, Y_2 は X_2 と同じ分布に従う確率変数とすると,

(X_1, X_2) と (Y_1, Y_2) は同じ特性関数を持つので同じ分布. したがって, X_1, X_2 は独立.

確率統計 A, 2012年7月24日: P.14

正規分布の特性

1. X_1, \dots, X_n を互いに独立に $N(0,1)$ に従う確率変数とすると, $X=(X_1, \dots, X_n)' \sim N(\mathbf{0}, I_n)$.
2. A を n 次正則行列で $AA'=\Sigma$, μ を n 次元ベクトルとすると, $Y=AX+\mu \sim N(\mu, \Sigma)$.
3. $Y \sim N(\mu, \Sigma)$ の特性関数は $\exp(it'\mu - t'\Sigma t)$.
4. C を $m \times n$ 行列で, $\text{rank } C=m$ とする. d を m 次元ベクトルとすると,
 $Z=CY+d \sim N(C\mu+d, C\Sigma C')$

確率統計 A, 2012年7月24日: P.15

正規分布の特性の証明

確率統計 A, 2012年7月24日: P.16