確率・統計 B
仮説検定

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/probstatB17/index.shtml

2017.12.15

table of contents

仮説検定とは (1/18)

例 8.1

問題：開発中の牛の飼料 A が従来の飼料 B より優れているかどうか判定したい

データ：月例、体重がほぼ同じ牛 n 頭に飼料 A を与え，1 ヶ月後の体重増加量を測定

$\bar{y}$：n 頭の平均体重増加量

μ_0：飼料 B を 1 ヶ月与えたときの平均体重増加量

$\bar{y} - \mu_0$ がどれぐらい大きければ，
飼料 A は 飼料 B より優れていると
判定してよいか？

仮説検定とは (2/18)

例 8.1 (続き)

統計モデル

n 頭の牛を, 大きな母集団からの標本と考える

体重増加量 Y の母集団分布を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ と仮定する

n 頭の体重増加量 $(y_1, \ldots, y_n)$: ランダム標本 $Y_1, \ldots, Y_n$ の実現値

仮説検定問題

データ $y_1, \ldots, y_n$ に基づいて, 2 つの仮説 :

H_1 : 飼料 A が飼料 B より優れていない $(\mu \leq \mu_0)$,
H_2 : 飼料 A が飼料 B より優れている $(\mu > \mu_0)$

のどちらが正しいか判定する問題

(厳密には, H_1 が正しくないと言えるかどうかを判定する)

仮説検定とは (3/18)

例 8.1 (続き)

検定の考え方

$\bar{y} - \mu_0$ の値が大きいほど仮説 H_1 は疑わしい.

$\Rightarrow \quad \bar{y} - \mu_0 > d$ のとき, H_1 は正しくないと判定する.

- d の値をどう決めればよいか？
- $\mu - \mu_0$ が大きくても, d をどのように決めても, $\bar{Y} - \mu_0 \leq d$ となる確率は 0 ではない.
- 例えば, $\bar{y} - \mu_0 = 0.3(\mathrm{kg})$ としても n や σ の値によって疑わしさの度合いが異なる.

仮説検定とは (4/18)

例 8.1 (続き)

疑わしさの度合い

H_1 が正しくて, $\mu = \mu_0$ であったとする

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\mathsf{P}(\bar{Y} - \mu_0 > d) = \mathsf{P}\left(Z > \frac{\sqrt{n}d}{\sigma}\right)$$

$$n = 16, \sigma = 10.0 \Rightarrow \mathsf{P}(\bar{Y} - \mu_0 > 0.3) = \mathsf{P}(Z > 0.12) \approx 0.452$$

$$n = 64, \sigma = 2 \Rightarrow \mathsf{P}(\bar{Y} - \mu_0 > 0.3) = \mathsf{P}(Z > 1.2) \approx 0.115$$

実現値 $\bar{y}$ に対して,

$$\mathsf{P}(\bar{Y} - \mu_0 > \bar{y} - \mu_0)$$

を p-値 と呼び, 仮説 H_1 の疑わしさの尺度とする.

仮説検定とは (5/18)

例 8.1 (続き)

検定方法

小さな値 α を基準として, p-値が α より小さいとき
仮説 H_1 を正しくないと判定する.

α を 有意水準といい, p-値が α より小さいとき,

「仮説 H_1 は有意水準 α で有意である」

という

仮説 $H_1 : \mu \leq \mu_0$ をデータから否定することによって, 飼料 A は B より優れていることを主張しようとしている.

帰無仮説 : 否定の対象となる仮説

棄却する : 仮説を正しくないと判定すること

対立仮説 : 帰無仮説が棄却されるとき, 支持されるもう一方の仮説

仮説検定とは (6/18)

母平均に関する検定
$X_1, \ldots, X_n$：母集団分布 P からのランダム標本
μ：母平均 (E$(X_i) = \mu$)
σ^2：母分散 (Var$(X_i) = \sigma^2$)

母平均が特定の値 μ_0 に等しいかどうかを検定したいとする.

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ に対しても, 対立仮説を $H_1 : \mu > \mu_0$, あるいは $H_1 : \mu < \mu_0$ のどちらか一方を考えることがある. このような検定を**片側検定**, 対立仮説として $H_1 : \mu \neq \mu_0$ を考えたものを**両側検定**という.

仮説検定とは (7/18)

正規母集団, 分散が既知の場合

(両側検定)
$|\bar{X}_n - \mu_0|$ の値が大きい程 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ は疑わしい
帰無仮説 H_0 が正しいとすると

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

であるので, 標本平均の実現値が $\bar{x}_n$ であったとき, p-値は

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

として

$$\mathrm{P}(|Z| > |z|) = 2\mathrm{P}(Z > |z|) = 2\{1 - \Phi(|z|)\}$$

仮説検定とは (8/18)

p-値 $< \alpha$ となる z の範囲は標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点を $z_{\alpha/2}$ とすると $|z| > z_{\alpha/2}$

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} \right| > z_{\alpha/2}$$

のとき, 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ を棄却する検定を

有意水準 α の両側検定

という.

仮説検定とは (9/18)

(片側検定)

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \mu > \mu_0$$

実現値

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

が大きい程, 帰無仮説は疑わしいので p-値は P$(Z > z) = 1 - \Phi(z)$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha$$

のとき, 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ を棄却する検定を

有意水準 α の片側検定

という.

仮説検定とは (10/18)

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \mu < \mu_0$$

に対しては,

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

が負で, その絶対値が大きい程, 帰無仮説が疑わしいので,
有意水準 α の片側検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} < -z_\alpha$$

のとき, H_0 を棄却する.

仮説検定とは (11/18)

正規母集団, 分散が未知の場合
σ^2 を 標本分散 $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ で推定する.
帰無仮説 H_0 が正しいとすると

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n} \sim t_{n-1} \text{ (自由度 } n-1 \text{ の t 分布)}$$

T の実現値を

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n}$$

とおくと, 両側対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ に対しては, $|t|$ が大きい程,
帰無仮説は疑わしい.

仮説検定とは (12/18)

自由度 $n-1$ の t 分布の上側 α 点を $t_{n-1}(\alpha)$ と書くと
有意水準 α の両側検定は

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} \right| > t_{n-1}(\alpha/2)$$

のとき, H_0 を棄却する.

t 分布を用いたこの検定を t 検定とよぶ.

仮説検定とは (13/18)

片側対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ に対して有意水準 α の検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} > t_{n-1}(\alpha)$$

のとき, H_0 を棄却.

片側対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$ に対して有意水準 α の検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} < -t_{n-1}(\alpha)$$

のとき, H_0 を棄却.

仮説検定とは (14/18)

母集団分布正規分布でない場合

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n}$$

の分布がわからないので, p-値が計算できないが, n が大きい場合には

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

であるので, 近似的に有意水準が α の両側検定は,

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} \right| > z_{\alpha/2}$$

のとき, H_0 を棄却

仮説検定とは (15/18)

片側対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ に対して近似的な有意水準 α の検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} > z_\alpha$$

のとき, H_0 を棄却.

片側対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$ に対して近似的な有意水準 α の検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} < -z_\alpha$$

のとき, H_0 を棄却.

仮説検定とは (16/18)

例 8.2

a コインを 20 回投げたら, 表が 19 回出た. 表, 裏が出る確率が等しいかどうか判定したい.
20 回投げて表が出る回数を X とする

仮説検定問題

$X \sim B(20, p)$

$$\text{帰無仮説 } H_0 : p = 1/2, \quad \text{対立仮説 } H_1 : p \neq 1/2$$

仮説検定とは (17/18)

例 8.3

続き X の実現値を x とする

$\hat{p} = \dfrac{x}{20}$: p の推定量

$\left|\hat{p} - \dfrac{1}{2}\right|$ が大きいほど H_0 は疑わしいので $x = 19$ のときの p-値は

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{20} - \frac{1}{2}\right| \geq \left|\frac{19}{20} - \frac{1}{2}\right|\right) = \mathrm{P}(X \in \{0, 1, 19, 20\})$$
$$= ({}_{20}C_0 +_{20} C_1 +_{20} C_{19} +_{20} C_{20}) \left(\tfrac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.00004$$

有意水準 0.01 でも棄却される.

仮説検定とは (18/18)

$X \sim B(n, p)$

$$\text{帰無仮説 } H_0 : p = p_0 \quad \text{対立仮説 } H_1 : p \neq p_0$$

帰無仮説 H_0 が正しいとすると

$$Z = \frac{X - p_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (n \to \infty)$$

なので, n が大きいとき, 近似的な有意水準 α の検定は

$$\frac{|x - p_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad \text{棄却}$$

一様最強力検定 (1/12)

一般的な仮説検定問題

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathrm{P},\ \mathrm{P} \in \mathcal{P} = \{\mathrm{P}_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

帰無仮説 $H_0 : \theta \in \Theta_0$,　対立仮説 $H_1 : \theta \in \Theta_1$

$(\Theta_0 \subset \Theta, \Theta_1 \subset \Theta,\ \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset)$

単純仮説：仮説で指定されるパラメータの値が 1 個の場合
$(H_0 : \theta = \theta_0,\quad \Theta_0 = \{\theta_0\})$

複合仮説：単純仮説でない仮説

棄却域：ある検定方法を定めたとき，その検定方法によって帰無仮説が棄却されるような実現値の全体からなる集合.

例. 母平均に関する有意水準 α の両側 t 検定の棄却域

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n)';\ \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n}\right| > z_{\alpha/2}\right\}$$

一様最強力検定 (2/12)

検定方法と棄却域の対応

$\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ と, $\boldsymbol{X}$ の実現値 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in \mathcal{W} & \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却} \\ \boldsymbol{x} \notin \mathcal{W} & \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却しない} \end{cases}$$

という検定方法を考えると, この検定方法の棄却域は $\mathcal{W}$ となる.

棄却域 $\mathcal{W}$ をどのように定めればよいか？

一様最強力検定 (3/12)

2 種類の過誤と過誤確率

$\mathcal{W}$ をある検定の棄却域とする

第 1 種の過誤 帰無仮説 H_0 が正しいのに, H_0 を棄却する誤り

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W} \,|\, \theta \in \Theta_0)$$

第 2 種の過誤 帰無仮説 H_0 が正しくないのに, H_0 を棄却しない誤り

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \notin \mathcal{W} \,|\, \theta \in \Theta_1)$$

$$\mathcal{W} \supset \mathcal{W}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mathsf{P}(\mathcal{W} \,|\, \Theta_0) \geq \mathsf{P}(\mathcal{W}_1 \,|\, \Theta_0) \\ \text{であるが} \\ \mathsf{P}(\mathcal{W} \,|\, \Theta_1) \leq \mathsf{P}(\mathcal{W}_1 \,|\, \Theta_1) \end{array}$$

一様最強力検定 (4/12)

$\beta(\theta) = \mathsf{P}(\mathcal{W} \mid \theta)$ とおくとき

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$$

であるような検定を, 有意水準 α の検定という

最適化問題

有意水準 α の検定の中で, 第 2 種の過誤確率を最小にしたい
有意水準 α の検定の中で, $\beta(\theta)$ $(\theta \in \Theta_1)$ を最大にする.

$\beta(\theta)$ $(\theta \in \Theta_1)$ を 検出力 (関数) という

一様最強力検定 (5/12)

単純仮説同志の検定

(∗)　帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$,　対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1$　$\theta_0 \neq \theta_1$

$\beta(\theta_0) \leq \alpha$ の条件下で $\beta(\theta_0)$ を最大にしたい

定理 8.1 (ネイマンーピアソンの基本定理)

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$: n 次元確率変数
$f(\boldsymbol{x}, \theta)$: その確率密度関数

$$\mathcal{W}_c = \{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \theta_1) \geq c\ f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta_0})\}$$

を棄却域とする検定は, 有意水準が $\alpha = \mathrm{P}(\mathcal{W}_c \,|\, \theta_0)$ である (∗) の検定の中で, 検出力 $\beta(\theta_1)$ を最大にする.
(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

一様最強力検定 (6/12)

定義 8.1 (最強力検定)

定理 8.1 の検定を最強力検定という

例 8.6

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 : 既知)
$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ の確率密度関数 :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \mu) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} A(\boldsymbol{x}) \right\} \exp\left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \mu)^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$A(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

一様最強力検定 (7/12)

例 8.6 (続き)

検定問題

(∗)　帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$,　対立仮説 $H_1 : \mu = \mu_1$　$(\mu_0 < \mu_1)$

有意水準 α の最強力検定

$$\frac{f(\boldsymbol{x};\ \mu_1)}{f(\boldsymbol{x};\ \mu_0)} = \exp\left\{\frac{n}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_0)\bar{x} + \frac{n}{2\sigma^2}(\mu_0^2 - \mu_1^2)\right\} > c$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} > d \quad (d \text{ は } n, \sigma^2, \mu_0, \mu_1 \text{ の関数 })$$

有意水準が α　$\Leftrightarrow$　$\mathrm{P}(\bar{x} > d \,|\, \mu_0) = \alpha$　$\Leftrightarrow$　$d = \mu_0 + \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma} z_\alpha$

$$\text{最強力検定：} \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ を棄却}$$

一様最強力検定 (8/12)

対立仮説が複合仮説の場合

(∗)　帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$,　対立仮説 $H_1 : \theta \in \Theta_1$　$\theta_0 \notin \Theta_1$

定義 8.2 (一様最強力検定)

(∗) の有意水準 α の検定について

$\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$ $(\theta \in \Theta_1)$ を棄却域 $\mathcal{W}$ によって定まる検定の検出力とする.

任意の $\theta \in \Theta_1$ と, 任意の $\mathcal{W}$ に対して

$$\beta_{\mathcal{W}_o}(\theta) \geq \beta_{\mathcal{W}}(\theta)$$

を満たす $\mathcal{W}_o$ によって定まる検定を一様最強力検定という.

一様最強力検定 (9/12)

$\theta_a, \theta_b \in \Theta_1$

$H_a : \theta = \theta_a, \quad H_b : \theta = \theta_b$

$\mathcal{W}_a$: H_0 vs H_a に対する有意水準 α の最強力検定 (棄却域)

$\mathcal{W}_b$: H_0 vs H_b に対する有意水準 α の最強力検定 (棄却域)

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_a \,|\, \theta_0) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_b \,|\, \theta_0) = \alpha$$
$$\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_a \,|\, \theta_a) \geq \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_b \,|\, \theta_a)$$
$$\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_a \,|\, \theta_b) \leq \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_b \,|\, \theta_b)$$

$\{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \theta_a) > 0\} = \{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \theta_b) > 0\}$ を仮定すると,

$\geq$ または $\leq$ が等号となるための必要十分条件は $\mathcal{W}_a = \mathcal{W}_b$

一様最強力検定 (10/12)

命題 1

- $\theta_1 \in \Theta_1$ とするとき,
$$(**) \quad H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1' : \theta = \theta_1$$
に対する最強力検定 $\mathcal{W}'$ が θ_1 に依存しないならば, $\mathcal{W}'$ は一様最強力検定となる.
- $\{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \theta) > 0\}$ が θ に依存しないとき, $(**)$ の最強力検定が $\mathcal{W}'$ が θ_1 によって異なるならば一様最強力検定は存在しない.

例 8.6 で求めた最強力検定は $\mu_1 > \mu_0$ である限り, μ_1 の値には依存しないので,

$$(*) \qquad 帰無仮説\ H_0 : \mu = \mu_0, \quad 対立仮説\ H_1 : \mu > \mu_0$$

に対する有意水準 α の一様最強力検定である.

一様最強力検定 (11/12)

注 8.1 (不偏検定)

例 8.6 において,

$$(*) \qquad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

に対する一様最強力検定は存在しない.

例 8.6 の検定 (片側検定) の検出力は $\mu < \mu_0$ のとき α より小さくなる.

両側検定問題で片側検定を用いると, 対立仮説が正しい $(\mu < \mu_0)$ ときの方が, 帰無仮説が正しい $(\mu = \mu_0)$ ときよりも帰無仮説を棄却しにくいことになる.

対立仮説の下で, 検出力が常に有意水準以上であるような検定を不偏検定とよぶ.

一様最強力検定 (12/12)

定義 8.3 (一様最強力不偏検定)

対立仮説が複合仮説であるとき, 対立仮説に含まれる任意のパラメータの値に対して検出力が最大となる不偏検定法を,
一様最強力不偏検定とよぶ.

例 8.7

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 : 既知)

(*) 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$

に対して,

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} > z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ を棄却}$$

は有意水準 α の一様最強力不偏検定である.
(証明は省略, テキスト例 8.7 参照)